Convergence de filtrations ; application à la discrétisation de processus et à la stabilité de temps d'arrêt.

Sandrine Toldo

N° d'Ordre : 3219

T H È S E

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention Mathématiques et Applications

par

Sandrine TOLDO

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

Convergence de filtrations ;
application à la discrétisation de processus
et à la stabilité de temps d'arrêt.

Soutenue le 25 novembre 2005 devant la Commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	F. Coquet	Directeur de thèse	ENSAI
M.	A. Debussche	Invité	Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan
M.	Y. Hu	Examinateur	Université de Rennes 1
M.	A. Jakubowski	Examinateur	Université de Torùn (Pologne)
M.	J. Mémin	Examinateur	Université de Rennes 1
M.	G. Pagès	Rapporteur	Université de Paris 6
M.	L. Słomínski	Rapporteur	Université de Torùn (Pologne)

Remerciements

Avant de rentrer dans le vif du sujet, voici les quelques lignes de ma thèse qui seront certainement les plus lues et, à coup sûr, les mieux comprises par le plus grand nombre de personnes...

Je tiens tout d'abord à remercier François Coquet qui m'a proposé ce sujet et m'a guidée pendant ces trois années et trois mois. Nos rendez-vous du vendredi matin 11 heures entre deux navettes Le Havre - Rennes ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail. Lors de ces entretiens, j'ai pu profiter des qualités pédagogiques de François que j'avais déjà notées en préparant l'agrégation.

Un grand merci à Gilles Pagès et Leszek Słomínski qui ont accepté de rapporter ce travail malgré un emploi du temps déjà chargé. Les échanges que nous avons eus m'ont permis d'améliorer les résultats de ce manuscrit et de rendre sa rédaction plus claire. Je remercie également Adam Jakubowski, Ying Hu, Jean Mémin et Arnaud Debusche d'avoir accepté de faire partie de mon jury comme examinateurs. Un merci tout particulier à Jean qui a très gentiment relu de nombreuses parties de ce mémoire, pour ne pas dire la totalité.

Je remercie mes collègues de l'équipe de processus stochastiques de l'IRMAR pour leur accueil et leur attention et plus particulièrement Philippe Briand pour son soutien dans la dernière ligne droite. Merci également aux secrétaires et tout le personnel administratif de l'IRMAR pour leur bienveillance et leur efficacité qui font que les tracas administratifs n'en sont pas vraiment pour nous.

Le bureau 334 de la tour de maths me laissera un souvenir impérissable. Pendant les deux premières années, j'ai bénéficié de l'expérience et des conseils de mes aînés Manuela, Ronan et surtout Benoîte, toujours calme et disponible pour tenter de trouver une solution à mes problèmes. Puis la troisième année, je me suis retrouvée dans le rôle de l'expérimentée avec la relève constituée d'Hélène et Marie-Amélie. Le point commun à toutes ces années aura été les pauses thé, moments quasi-sacrés de la journée !

J'ai aussi eu la chance d'enseigner, essentiellement à l'Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan, que ce soit dans le cadre du monitorat ou de cette année d'ATER. Florent, Arnaud et Philippe, travailler avec vous est un véritable plaisir. Vous m'avez permis de m'investir dans les différents modules notamment en préparant des feuilles d'exercices, en cobayant des sujets d'examens et en me demandant régulièrement mon avis sur certains points, ce que j'ai beaucoup apprécié. Je remercie également Michel Pierre qui m'a permis de participer à des oraux blancs d'agrégation.

Ces années n'auraient pas été les mêmes sans plein d'autres petites choses. Je pense notamment aux fous-rires au RU avec Valéry, Sylvain, Karel, Jérôme et tous les autres du 6e, aux nombreuses discussions de couloir avec Glenn et Elise, aux pauses café à Ker Lann avec Nicolas, à l'assistance de Greg qui répond à toutes mes exigences informatiques, aux délires avec Delphine et Alice depuis la prépa agreg, aux sorties voile avec Florent et au badminton qui m'a apporté beaucoup plus que je ne l'aurais imaginé au départ...

Un grand merci à mes parents et à mon frère Johann pour la confiance que vous avez en moi et pour vos encouragements qui me permettent de tenir le coup dans les moments difficiles. Et pour finir cette longue liste, un tendre merci à Lionel pour tous les petits bonheurs du quotidien.

Table des matières

Introduction

Ma thèse porte essentiellement sur des propriétés de stabilité de problèmes d'arrêt dans le cas où l'on dispose d'une information approximative sur le modèle. Quand on considère un processus, l'information véhiculée au cours du temps par ce processus est représentée par la filtration qu'il engendre et à une filtration correspond une famille de temps d'arrêt. Aussi, quand on approche un processus donné par une suite de processus, dans les problèmes d'arrêt considérés les ensembles de temps d'arrêt vont changer puisque les filtrations changent. Les propriétés des suites de filtrations vont donc jouer un grand rôle d'autant plus qu'en général le fait d'avoir uniquement convergence des processus ne suffira pas à résoudre les problèmes considérés.

Dans le cas où on approche un processus par ses discrétisés construits à partir d'une suite croissante de subdivisions, on va avoir inclusion des filtrations associées aux discrétisés dans celle associée au processus initial et, de ce fait, les ensembles de temps d'arrêt associés vont être inclus les uns dans les autres. L'information véhiculée par les discrétisés augmente quand le pas de la subdivision diminue.

Cette situation d'inclusion des filtrations n'est pas toujours vérifiée quand on approche un processus autrement que par ses discrétisés. Cependant sans avoir cette inclusion, l'information véhiculée par le processus de départ peut être asymptotiquement l'information véhiculée par la suite de processus qui converge vers le processus initial. La notion sous-jacente est celle de convergence de filtration introduite par Hoover dans [22] et étudiée par Coquet, Mémin et Słomiński dans [16]. La convergence d'une suite de processus est uniquement une convergence trajectorielle tandis que la convergence des filtrations rend également compte des propriétés stochastiques associées aux processus.

Ces deux hypothèses, inclusion des filtrations et convergence des filtrations, sont au coeur des résultats de stabilité des deux problèmes d'arrêt étudiés dans la suite.

Un premier axe de ma thèse qui sera l'objet du chapitre 2 concerne les réduites et les temps d'arrêt optimaux. D'une façon générale, une réduite est la valeur maximale de l'espérance d'une fonction dépendant d'un processus et d'un temps d'arrêt, valeur maximale prise sur l'ensemble des temps d'arrêt associés à l'information véhiculée par le processus. Un temps d'arrêt optimal sera un temps d'arrêt tel que cette valeur maximale soit atteinte. Autrement dit, étant donnée une fonction continue bornée γ, la réduite d'horizon L du processus X est définie par $\Gamma(L) = \sup \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)]$ où le supremum est pris sur les temps d'arrêt τ associés à la filtration engendrée par X et bornés par L. Un temps d'arrêt optimal est un temps d'arrêt pour lequel ce supremum est atteint.

On s'intéresse à la stabilité de ces deux notions dans le cas où l'on dispose d'une information approximative.

Précisément, si on approche le processus X par une suite de processus (X^n) et si on note $(\Gamma_n(L))$ les réduites associées aux X^n, a t'on convergence de $(\Gamma_n(L))$ vers $\Gamma(L)$? Cette question a déjà été abordée par Aldous dans [2] puis par Lamberton et Pagès dans [37]. Dans ces deux travaux figure une hypothèse forte de convergence étendue. Mon but était de trouver des hypothèses moins contraignantes. Le résultat principal de ma thèse concernant la convergence des réduites est le théorème 2.2.1 que voici :

Théorème *Soit X un processus càdlàg et $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg. Soit $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à la filtration engendrée par X et $(\mathcal{F}^n)_n$ les filtrations engendrées par les processus $(X^n)_n$. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, que (X_n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2) et que ou bien pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$, ou bien $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. Alors $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(L)$.*

On remarquera en particulier que ce théorème couvre le cas où le processus X est approché par ses discrétisés suivant une suite croissante de subdivisions puisqu'on a alors inclusion des filtrations ainsi que tous les exemples de [16] où la convergence en probabilité des processus entraîne celle des filtrations associées.

Ensuite, si on a convergence des réduites et si (τ^n) est une suite de temps d'arrêt optimaux associés aux (X^n) qui converge en loi vers une variable aléatoire τ, il est naturel de se demander si τ est un temps d'arrêt optimal pour X. Cette question est bien plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord. En effet, il existe dans la littérature des résultats donnant des hypothèses pour que la limite τ réalise le sup $\Gamma(L)$. Cependant, le fait que la limite en loi d'une suite de temps d'arrêt ait la loi d'un temps d'arrêt (pour la filtration voulue) n'est pas du tout évident. Mon principal résultat concernant la convergence des temps d'arrêt optimaux est le théorème 2.3.4 :

Théorème *Soit (X^n) une suite de processus càdlàg qui converge en loi vers un processus quasi-continu à gauche X. On suppose que les (X^n) sont des processus à accroissements indépendants. Soit $(\mathcal{F}^n)_n$ et $\mathcal{F}^X$ les filtrations engendrées par ces processus et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à $\mathcal{F}^X$. Soit (τ^n) une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt optimaux. Alors, si (X, τ) est une valeur d'adhérence de $((X^n, \tau^n))_n$ telle que τ soit $\mathcal{F}_T$-mesurable, τ est un temps d'arrêt optimal pour X.*

Ce travail est illustré par une application en finance basée sur l'approximation du modèle de Black et Scholes par des modèles de Cox, Ross et Rubinstein. Le théorème 2.2.1 permet de retrouver le fait (connu) que les réduites associées au modèle de Cox, Ross et Rubinstein (espérance maximale de gain d'une option de vente américaine, par exemple) convergent vers celle associée au modèle de Black et Scholes limite. Ma contribution concerne la convergence des temps d'arrêt optimaux associés. Étant donnée l'hypothèse de mesurabilité de τ présente dans le théorème de convergence des temps d'arrêt optimaux, le résultat de la proposition 2.4.5 portant sur la convergence des temps d'arrêt optimaux des modèles de Cox, Ross et Rubinstein vers ceux du modèle de Black et Scholes dépend de façon cruciale des variables de Bernoulli choisies pour approcher le mouvement brownien.

Le second axe de ma thèse qui sera l'objet du chapitre 3 concerne la stabilité de solutions d'Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR en abrégé) à horizon aléatoire. Les EDSR à horizon aléatoire ont été étudiées notamment pour leurs liens avec les Équations aux Dérivées Partielles de type elliptique (cf Peng [50] par exemple). Comme pour les EDSR à horizon déterministe, il est utile de connaître la robustesse de schémas d'approximation numérique. Le but de cette partie est de généraliser les travaux de Briand, Delyon et Mémin [10] et [11] qui portent sur des EDSR à horizon déterministe. On s'intéresse à la stabilité des solutions d'EDSR à horizon aléatoire quand le mouvement brownien qui dirige l'équation est remplacé soit par une marche aléatoire, soit par une martingale.

Le premier cas étudié consiste à approcher le mouvement brownien par une suite de marches aléatoires.

Précisément, on considère une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ γ-lipschitzienne en ses deux variables. On suppose également que f est bornée, que f est monotone en y au sens où il existe $\mu > 0$ tel que $\forall (t, y, z), (t, y', z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, (y - y')(f(t, y, z) - f(t, y', z)) \leqslant -\mu(y - y')^2$ et pour tout (y, z), $\{f(t, y, z)\}_t$ est progressivement mesurable Soit W un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par ce processus. Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt fini presque sûrement. On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s dW_s, \ \forall t \geqslant 0 \tag{1}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable bornée.

Pour approcher l'équation (1), on considère la suite de marches aléatoires $(W^n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $W_t^n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{[nt]} \varepsilon_k^n,\ t \geqslant 0$ où $(\varepsilon_k^n)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une suite de variables i.i.d. de Bernoulli symétriques. Soit $(\mathcal{F}^n)$ les filtrations engendrées par les W^n. On a $\mathcal{F}_t^n = \sigma(\varepsilon_k^n, k \leqslant [nt])$. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt tels que, pour chaque n, $\tau^n \leqslant n$. On considère ensuite l'EDSR suivante :

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f(s, Y^n_{(s\wedge\tau^n)-}, Z^n_{s\wedge\tau^n})dA_s^n - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z^n_{s\wedge\tau^n} dW_s^n, \tag{2}$$

où $A_s^n = \frac{[ns]}{n}$ et (ξ^n) est une suite de variables aléatoires $(\mathcal{F}^n_{\tau^n})$-mesurables telles que $\sup_n \|\xi^n\|_\infty < \infty$.

Le résutat de convergence suivant (théorème 3.2.5) généralise celui de Briand, Delyon et Mémin dans [10] :

Théorème *Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR (1) et (Y^n, Z^n) les processus constants par morceaux sur les intervalles $[k/n, (k+1)/n[$ et $]k/n, (k+1)/n]$ respectivement solutions de l'équation (2). On suppose que l'on a les convergences $\xi^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ et*

$W^n \xrightarrow{\mathbb{P}} W$. *Alors*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}|Y_t^n - Y_t| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t}|Z_t^n - Z_t|^2 dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$
$$\forall L,\ \sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t Z_s^n dW_s^n - \int_0^t Z_s dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$
$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left|\int_0^t e^{-\mu s} Z_s^n dW_s^n - \int_0^t e^{-\mu s} Z_s dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Le second cas étudié consiste à approcher le mouvement brownien par une suite de martingales. Précisément, soit W un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par ce processus. Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt fini presque sûrement. On considère l'EDSR suivante :

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_r dW_r,\ t \geqslant 0$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et pour tout (y,z), $\{f(t,y,z)\}_t$ est progressivement mesurable.

Pour approcher cette équation, on considère une suite de processus càdlàg $(W^n)_n$ et $(\mathcal{F}^n)_n$ les filtrations engendrées par ces processus. On suppose que (W^n) est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-martingales de carré intégrable qui converge en probabilité vers W. On ne suppose pas que W^n a la propriété de représentation prévisible. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt bornés qui converge *p.s.* vers τ. On considère alors l'EDSR suivante :

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, Y_{r-}^n, Z_r^n)d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - (N_{\tau^n}^n - N_{t\wedge\tau^n}^n), t \geqslant 0$$

où $(\xi^n)_n$ est une suite de variables aléatoires $(\mathcal{F}_{\tau^n}^n)$-mesurables, (N^n) une suite de martingales orthogonales à (W^{n,τ^n}) et pour tout (y,z), $\{f^n(t,y,z)\}_t$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}^n)$.

Sous des hypothèses raisonnables de convergence de (W^n) vers W, de convergence et de régularité des générateurs et de convergence des horizons aléatoires, le théorème 3.3.6 généralise le résultat de convergence de Briand, Delyon et Mémin dans [11].

Dans les deux grands axes cités précédemment, les principaux outils utilisés sont essentiellement les mêmes. Ils seront étudiés dans le chapitre 1, ce qui permettra en outre de fixer les notations employées dans tout le reste de ce mémoire.

Dans les deux cas, on approche un processus limite X par une suite de processus (X^n). Quand on ne connaît que les X^n, on ne dispose que d'une information approximative sur le processus X. Il est alors important de savoir si l'information véhiculée par les processus X^n converge vers celle véhiculée par le processus limite X. Or l'information véhiculée par un processus est résumée par la filtration engendrée par ce processus. Le premier outil fondamental de ma thèse est donc la convergence de filtrations. En particulier, j'élargis cette notion au cadre des filtrations arrêtées par des temps d'arrêt.

Ensuite, que ce soit au sujet de temps d'arrêt optimaux ou au sujet d'EDSR à horizon aléatoire, il est question de limites de suites de temps d'arrêt. Or la limite en loi d'une suite de temps d'arrêt n'est pas forcément la loi d'un temps d'arrêt pour la filtration considérée. Je donne donc des conditions pour que la limite d'une suite de temps d'arrêt soit un temps d'arrêt et également une méthode pour obtenir une suite de temps d'arrêt convergeant vers une limite initialement donnée.

Enfin, pour l'application en finance de la première partie et pour illustrer les résultats de convergence de solutions d'EDSR, je me suis intéressée à différentes façons d'approcher le mouvement brownien par des suites de marches aléatoires mesurables par rapport à la filtration brownienne à l'instant terminal. On décrira trois constructions différentes. Une approche naturelle consiste à prendre comme variables de Rademacher le signe des accroissements du mouvement brownien, mais on verra que cette méthode ne peut pas convenir. On décrira ensuite une méthode basée sur les propriétés du module de continuité. On verra que cette construction ne permet cependant pas d'obtenir une marche aléatoire au sens voulu. Enfin, on exposera la construction de Knight [34] qui répond au problème considéré.

Chapitre 1

Les outils fondamentaux

Le principal but de ce chapitre est d'introduire les grandes notions transversales aux deux chapitres suivant.

1.1 Convergence de tribus, convergence de filtrations

Les notions de convergence de tribus et de filtrations ont été introduites par Hoover [22] en 1991 et étudiées par Coquet, Mémin et Mackevičius [15] en 2000 puis par Coquet, Mémin et Słomiński [16] en 2001. Dans ces papiers, les filtrations sont indexées par un intervalle de temps borné $[0, T]$ et c'est dans ce cadre que nous nous placerons dans toute cette thèse sauf dans la section 1.1.5 de ce chapitre et dans tout le chapitre 3.

La notion de convergence de filtrations dépend de la topologie mise sur l'espace des processus càdlàg. Ici, il s'agira de la topologie de Skorokhod. Dans la section 1.1.1, nous redéfinirons la topologie J_1 de Skorokhod et nous rappellerons les principales propriétés de cette topologie utilisées dans cette thèse. Nous donnerons notamment quelques propriétés liant convergence de processus et convergence finie-dimensionnelle en tout instant d'un ensemble dense dans $[0, T]$, typiquement l'ensemble des instants de continuité d'un processus. Ce lien sera très fréquemment utilisé dans les preuves.

Dans la section 1.1.2, nous donnerons la définition des notions de convergence de tribus et de convergence de filtrations. Nous verrons également une caractérisation de ces convergences dans le cas où les tribus (resp. filtrations) sont engendrées par des variables aléatoires (resp. par des processus). D'autre part, la notion de convergence de filtrations a des liens étroits avec celle de convergence étendue d'Aldous. Nous discuterons donc brièvement des relations entre ces deux convergences qui seront toutes les deux citées dans le chapitre 2 sur les convergences de réduites. Le critère de tension d'Aldous sera une hypothèse récurrente dans les résultats du chapitre 2. Aussi nous discuterons de cette notion qui a des liens assez forts avec celle de quasi-continuité à gauche de processus limite, notamment sous hypothèse de convergence étendue.

Ensuite, dans la section 1.1.3, nous discuterons du lien entre convergence de filtrations et convergence ponctuelle des tribus associées dans le cas d'une suite de filtrations engendrée par une suite de processus. Cette caractérisation sera la clé de la preuve de la convergence de la suite de temps d'arrêt du lemme 1.2.8 qui sera lui-même utilisé dans le chapitre 2.

Enfin, la principale innovation concernant la notion de convergence de filtrations est la section 1.1.4 où nous nous intéressons à des filtrations arrêtées. Dans un premier temps, nous définirons la notion de tribu des événements antérieurs et celle de filtration arrêtée. Nous donnerons ensuite des résultats de convergence dans différents cas particuliers à savoir le cas de temps d'arrêt prenant un nombre fini de valeurs, puis dans le cas de suite décroissante de filtrations et de temps d'arrêt et enfin nous verrons des résultats dans le cas de filtrations engendrées par des processus avec une application aux processus discrétisés.

Des résultats de convergence de filtrations arrêtées seront utilisés dans le chapitre 3 dans un cadre légèrement différent. En effet, dans le chapitre 3, nous considérerons des filtrations arrêtées par des temps d'arrêt finis presque sûrement (mais pas nécessairement bornés). Nous terminerons donc cette partie par la section 1.1.5 qui traîte brièvement du cas de processus indexés par $\mathbb{R}^+$. Nous donnerons la définition de la topologie de Skorokhod dans ce cadre, étendrons la notion de convergence de filtrations et enfin nous généraliserons les résultats connus dans le cas d'un horizon borné et qui seront utilisés dans le chapitre 3.

1.1.1 La topologie $\mathbf{J_1}$ de Skorokhod

Cette topologie a été introduite par Skorokhod dans [58] et étudiée ensuite notamment dans les livres de Billingsley [7] pour les processus indexés par $[0,1]$ et de Jacod et Shiryaev [27] pour les processus indexés par $\mathbb{R}^+$. Dans cette partie, les résultats non démontrés proviennent des livres [7] et [27].

Le cas déterministe

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions continues à droite avec une limite à gauche en tout point (càdlàg en abrégé) sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sur cet espace, la topologie de la convergence uniforme n'est pas celle qui convient le mieux. Intuitivement, la topologie J_1 de Skorokhod est une topologie de convergence uniforme qui tient compte des décalages entre les instants de sauts de la suite de processus et de leur limite. On va maintenant définir précisément cette notion.

Soit Λ l'ensemble des changements de temps de $[0,T]$ dans $[0,T]$, *i.e.* l'ensemble des fonctions $\lambda : [0,T] \to [0,T]$ continues strictement croissantes telles que $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(T) = T$.

On définit la distance de Skorokhod, notée d_S, de la façon suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{D},\ d_S(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \{\|\lambda - Id\|_\infty \vee \|x - y\circ\lambda\|_\infty\}.$$

On dit qu'une suite (x^n) d'éléments de $\mathbb{D}$ converge vers $x \in \mathbb{D}$ au sens de la topologie J_1 de Skorokhod si $d_S(x^n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On notera $x^n \to x$ ou $x^n \xrightarrow{J_1} x$ si besoin.

Remarque 1.1.1 On munit l'espace $\mathbb{D}$ de sa tribu borélienne, *i.e.* la tribu engendrée par tous les ouverts pour la topologie de Skorokhod. C'est également la tribu engendrée par les applications càdlàg. Ainsi, les projections $\pi_t : x \mapsto x(t)$ sont continues. Nous verrons ce que cette topologie entraîne sur la mesurabilité des processus aléatoires dans la remarque 1.1.9.

Exemple 1.1.2 On prend $T = 1$. La suite $(x_n = \mathbf{1}_{[1/2+1/n,1]})_n$ converge vers $x = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$ pour la topologie J_1 de Skorokhod. En revanche, cette convergence n'a pas lieu pour la topologie de la norme uniforme à cause du décalage entre les instants de saut des x_n qui a lieu en $1/2 + 1/n$ et celui de x qui a lieu en $1/2$.

La topologie de Skorokhod coïncide avec la topologie de la convergence uniforme si la limite est continue. Plus précisément, nous allons énoncer deux résultats classiques liant convergence uniforme et convergence pour la topologie J_1 de Skorokhod.

Proposition 1.1.3 *Si $x^n \xrightarrow{J_1} x$ et si t est un instant tel que $\Delta x(t) = 0$, alors on a la convergence ponctuelle $x^n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x(t)$.*

Proposition 1.1.4 *Si $x^n \xrightarrow{J_1} x$ et si x est continue sur le compact $[0,T]$, alors on a la convergence uniforme $\sup_t |x^n(t) - x(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*

D'autre part, on a également la convergence ponctuelle au bord.

Lemme 1.1.5 *Si $x^n \xrightarrow{J_1} x$, alors $x^n(T) \to x(T)$.*

Démonstration
Soit $(\lambda^n)_n$ une suite de changements de temps adaptée à la convergence de (x^n) vers x. On a alors :

$$\sup_{s\in[0,T]} |x^n(\lambda^n(s)) - x(s)| \to 0.$$

Mais, $|x^n(T) - x(T)| = |x^n(\lambda^n(T)) - x(T)|$ par construction de (λ^n). Le résultat en découle immédiatement. □

Un objet utile quand on manipule des fonctions continues est le module de continuité qui est défini de la façon suivante :

Définition 1.1.6 *Le module de continuité d'une fonction continue $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle $I \subset [0,T]$ est défini par :*

$$w(\alpha, I) = \sup_{s,t\in I} |\alpha(s) - \alpha(t)|.$$

Pour l'étude des fonctions càdlàg, on est aussi amené à introduire un module de « continuité ».

Définition 1.1.7 *Le module de « continuité » d'ordre $\theta > 0$ d'une fonction $\alpha \in \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R})$ est défini par :*

$$w'(\alpha,\theta) = \inf_{\{t_i\}\in\mathcal{P}} \max_i \; w(\alpha,[t_{i-1},t_i[)$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des subdivisions $\{t_i\}$ de $[0,T]$ telles que $\min_i(t_i - t_{i-1}) \geqslant \theta$.

On a alors la caractérisation suivante des fonctions càdlàg sur $[0,T]$:

Proposition 1.1.8 *Une fonction $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}$ appartient à $\mathbb{D}([0,T])$ si et seulement si on a $\lim_{\theta\downarrow 0} w'(\alpha,\theta) = 0$.*

Application aux processus aléatoires

Nous considérons maintenant des processus aléatoires càdlàg, c'est-à-dire des processus $X : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$ dont toutes les trajectoires sont càdlàg. Nous allons définir les notions de convergence en loi, en probabilité, L^p et presque sûre de suite de processus càdlàg.

Remarque 1.1.9 Avec la topologie de Skorokhod, comme les projections sont continues, à la fois les processus et les applications coordonnées sont mesurables. Les liens entre convergence de processus et convergence fini-dimensionnnelle seront très nombreux comme on va le voir dans la suite.

Convergence en loi Soit (X^n) une suite de processus càdlàg indexés par $[0,T]$ définis sur les espaces $(\Omega^n,\mathcal{G}^n,\mathbb{P}^n)$ et X un processus càdlàg indexé par $[0,T]$ défini sur un espace $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$.

Définition 1.1.10 *On dit que $(X^n)_n$ converge en loi vers X si, pour toute fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ bornée et continue (pour la topologie de Skorokhod), $(\int f(X^n)d\mathbb{P}^n)_n$ converge vers $\int f(X)d\mathbb{P}$. On notera $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Pour prouver la convergence en loi, on utilise souvent le critère de Prokhorov :

Proposition 1.1.11 *$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si :*
(i) $(X^n)_n$ est tendue,
(ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1,\ldots,t_k \in D$ où D est un sous-ensemble dense de $[0,T]$ contenant T, la suite de variables aléatoires $((X^n_{t_1},\ldots,X^n_{t_k}))_n$ converge en loi vers $(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$.

Rappelons un critère pour prouver qu'une suite de processus est tendue :

Proposition 1.1.12 *La suite de processus (X^n) est tendue si et seulement si*
(i) $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\exists K \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}[\sup_t |X^n_t| > K] \leqslant \varepsilon$,
(ii) $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\eta > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\exists\theta > 0$, $\forall n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}[w'(X^n,\theta) \geqslant \eta] \leqslant \varepsilon$.

Convergence en probabilité Soit (X^n) et X des processus càdlàg indexés par $[0,T]$ définis sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.13 *On dit que* (X^n) *converge en probabilité vers* X *si* $(d_S(X^n, X))_n$ *converge en probabilité vers 0. On notera* $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Voyons une caractérisation à l'aide de changements de temps aléatoires qui est l'objet du théorème 2.1 de Jacod et Protter [26].

Proposition 1.1.14 $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *si et seulement s'il existe une suite* $(\Lambda^n)_n$ *de processus càdlàg continus strictement croissants tels que* $\Lambda^n(0) = 0$ *et* $\Lambda^n(T) = T$ *vérifiant :*
(i) $(\Lambda^n)_n$ *converge uniformément en probabilité vers l'identité,*
(ii) $(X^n \circ \Lambda^n)_n$ *converge uniformément vers* X *en probabilité.*

Remarque 1.1.15 Dans ce mémoire, nous supposerons que les Λ^n sont tous mesurables pour la tribu borélienne de $\mathbb{D}$. Dans [26], Jacod et Protter montrent que la suite (Λ^n) peut être contruite $(\mathcal{G}^n)$ adaptée où la suite de filtrations $(\mathcal{G}^n)$ est telle que, pour tout t, $\mathcal{G}^n_t = \mathcal{F}_{t+\gamma_n}$ avec (γ_n) suite de réels décroissant vers 0 et $\mathcal{F}$ filtration engendrée par X.

On va montrer que la convergence ponctuelle en probabilité de (X^n) vers un processus càdlàg X et la tension de la suite (X^n) entraînent la convergence en probabilité de (X^n) vers X.

Dans la preuve, nous utiliserons la notion de processus discrétisé que nous définissons ici.

Soit X un processus càdlàg. On considère une suite de subdivisions de $[0,T]$ $(\pi^n = \{0 = t^n_0 < \ldots < t^n_{N_n} = T\})_n$ de pas tendant vers 0, i.e. telle que $|\pi^n| = \max_i |t^n_{i+1} - t^n_i| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Pour tout n, on définit le processus discrétisé X^n par :

$$\forall t \in [0,T],\ X^n_t = \sum_{i=1}^{N_n - 1} X_{t_i} \mathbf{1}_{[t^n_i, t^n_{i+1}[}(t) + X_T \delta_T(t).$$

Proposition 1.1.16 *Soit* (X^n) *une suite de processus càdlàg et* X *un processus tels que :*

(i) X *est càdlàg,*

(ii) (X^n) *est tendue,*

(iii) $X^n_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$ *en tout instant* t *d'un ensemble dense* D *de* $[0,T]$ *contenant* T.

Alors $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *pour* J_1.

Démonstration
Soit $(\pi^p)_p = (\{t^p_i\}_i)_p$ une suite de subdivisions ne contenant que des points de D. On considère les discrétisés Y^p de X suivant π^p et les discrétisés $Y^{n,p}$ des X^n suivant π^p.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.
D'après (i) et (ii), il existe $\theta > 0$ et N_0 tels que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$\mathbb{P}[w'(X^n, \theta) \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[w'(X, \theta) \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3.$$

On fixe p tel que $\delta^p \leqslant \min\{\eta/3, \theta\}$.
Par croissance de $\delta \mapsto w'(X, \delta)$, on a :

$$\mathbb{P}[w'(X^n, \delta^p) \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[w'(X, \delta^p) \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3.$$

Pour tout i, $X^n_{t^p_i} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_{t^p_i}$ d'après (iii). Comme la subdivision est finie, il vient $Y^{n,p} \xrightarrow{\mathbb{P}} Y^p$.
Ainsi, il existe N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$,

$$\mathbb{P}[d_S(Y^{n,p}, Y^p) \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3.$$

Soit $n \geqslant \max\{N_0, N_1\}$.

$$\begin{array}{rl}
\mathbb{P}[d_S(X^n, X) \geqslant \eta] & \\
\leqslant & \mathbb{P}[d_S(X^n, Y^{n,p}) \geqslant \eta/3] + \mathbb{P}[d_S(Y^{n,p}, Y^p) \geqslant \eta/3] + \mathbb{P}[d_S(Y^p, X) \geqslant \eta/3] \\
\leqslant & \mathbb{P}[\max\{\delta^p, w'(X^n, \delta^p)\} \geqslant \eta/3] + \mathbb{P}[d_S(Y^{n,p}, Y^p) \geqslant \eta/3] \\
& \quad +\mathbb{P}[\max\{\delta^p, w'(X, \delta^p)\} \geqslant \eta/3] \\
& \qquad \text{d'après le lemme 3 section 12 de Billingsley dans [7]} \\
\leqslant & \varepsilon.
\end{array}$$

D'où la conclusion. □

Convergence L^p Soit (X^n) et X des processus càdlàg indexés par $[0, T]$ définis sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.17 *On dit que (X^n) converge dans L^p vers X si $(d_S(X^n, X))_n$ converge dans L^p vers 0. On notera $X^n \xrightarrow{L^p} X$.*

Convergence presque sûre Soit (X^n) et X des processus càdlàg indexés par $[0, T]$ définis sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Définition 1.1.18 *On dit que (X^n) converge presque sûrement vers X si $(d_S(X^n, X))_n$ converge presque sûrement vers 0. On notera $X^n \xrightarrow{p.s.} X$.*

Illustrons cette convergence par le cas des discrétisés d'un processus càdlàg X.

Proposition 1.1.19 *Soit X un processus càdlàg et (X^n) la suite de ses discrétisés selon une suite de subdivisions (π^n) de pas tendant vers 0. La suite de processus (X^n) converge presque sûrement vers le processus càdlàg X.*

Démonstration
D'après le lemme 3 section 12 de Billingsley dans [7],

$$\forall \omega,\ d_S(X^n(\omega), X(\omega)) \leqslant |\pi^n| \vee w'(X(\omega), |\pi^n|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car pour tout ω, $X_.(\omega) \in \mathbb{D}$ et $|\pi^n| \to 0$.
D'où la convergence cherchée. □

Propriétés de stabilité par changement d'espace

Dans cette section, nous allons donner deux résultats élémentaires portant sur des propriétés conservées naturellement par changement d'espace. Plus précisément, soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathbb{P}})$ deux espaces probabilisés. On considère (X, τ) défini sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ et $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ défini sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathbb{P}})$. On suppose que X et $\tilde{X}$ sont des processus càdlàg et que τ et $\tilde{\tau}$ sont des variables aléatoires. On suppose également que $(X, \tau) \sim (\tilde{X}, \tilde{\tau})$. Soit $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite engendrée par X et $\tilde{\mathcal{F}}$ celle engendrée par $\tilde{X}$.

Typiquement, on se retrouve dans cette situation quand on applique le théorème de représentation de Skorokhod. Voici donc deux propriétés du couple (X, τ) également vérifiées par $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$.

Lemme 1.1.20 *Si $\tilde{\tau} = f(\tilde{X})$ avec f mesurable, alors $\tau = f(X)$ p.s.*

Démonstration
$(X, \tau) \sim (\tilde{X}, \tilde{\tau})$ donc, pour toute fonction mesurable h, $\int h(X, \tau) d\mathbb{P} = \int h(\tilde{X}, \tilde{\tau}) d\tilde{\mathbb{P}}$. Comme $\tilde{\tau} = f(\tilde{X})$, on a alors $\int h(X, \tau) d\mathbb{P} = \int h(\tilde{X}, f(\tilde{X})) d\tilde{\mathbb{P}}$.
Soit h la fonction définie par $h(x, y) = (y - f(x))^2$. f étant mesurable, h est mesurable et donc $\int (\tau - f(X))^2 d\mathbb{P} = 0$. Ainsi $\tau = f(X)$ *p.s.* □

Le second lemme porte sur une propriété de stabilité de temps d'arrêt.

Lemme 1.1.21 *On suppose X continu en probabilité. Si τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, alors $\tilde{\tau}$ est un $\tilde{\mathcal{F}}$-temps d'arrêt.*

Démonstration
Soit $t \in [0, T]$. τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, donc $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurable et $s_1, \ldots, s_k$ dans $[0, t]$ tels que

$$\mathbb{E}\left[|1_{\{\tau<t\}} - f(X_{s_1}, \ldots, X_{s_k})|\right] \leqslant \varepsilon.$$

$(\tilde{X}, \tilde{\tau}) \sim (\tilde{X}, \tilde{\tau})$ donc $1_{\{\tau<t\}} - f(X_{s_1}, \ldots, X_{s_k}) \sim 1_{\{\tilde{\tau}<t\}} - f(\tilde{X}_{s_1}, \ldots, \tilde{X}_{s_k})$. Alors, $\mathbb{E}\left[|1_{\{\tilde{\tau}<t\}} - f(\tilde{X}_{s_1}, \ldots, \tilde{X}_{s_k})|\right] \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, $\{\tilde{\tau} < t\} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$. Donc $\tilde{\tau}$ est un $\tilde{\mathcal{F}}$-temps d'arrêt. □

1.1.2 Convergence de tribus et convergence de filtrations : définitions et caractérisations

Les notions de convergence de tribus et de filtrations ont été introduites par Hoover dans [22] en 1991. Dix ans après, Coquet, Mémin et Mackevičius dans [15] donnent une série d'exemples et de contre-exemples sur des propriétés vérifiées ou non par ces convergences. Ensuite, dans [16], Coquet, Mémin et Słomiński s'intéressent aux liens entre convergence de processus et convergence des filtrations engendrées par ces processus.

La définition de la convergence des tribus est la même dans tous les papiers cités ci-dessus. Ce n'est pas le cas pour la convergence des filtrations étant donné que la topologie mise sur l'espace des processus n'est pas la même pour Hoover et pour Coquet, Mémin, Mackevičius et Słomiński. Dans cette thèse, nous ne considérerons pas la définition de Hoover, mais celle donnée dans [16].

Définition 1.1.22 *On dit qu'une suite de tribus* $(\mathcal{A}^n)_n$ *converge faiblement vers une tribu* $\mathcal{A}$ *si pour tout* $B \in \mathcal{A}$*, la suite de variables aléatoires* $(\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{A}^n])_n$ *converge en probabilité vers la variable aléatoire* $\mathbf{1}_B$*. On notera* $\mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$*.*

Définition 1.1.23 *On dit qu'une suite de filtrations* $(\mathcal{F}^n)_n$ *converge faiblement vers une filtration* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $A \in \mathcal{F}_T$*, la suite de processus* $(\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_\cdot])_n$ *converge en probabilité vers le processus* $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\cdot]$ *au sens de la topologie* J_1 *de Skorokhod. On notera* $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$*.*

Remarque 1.1.24 Il existe aussi une notion de convergence forte de filtrations. Si on travaille sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, on dira que la suite de filtrations $(\mathcal{F}^n)$ converge fortement vers la filtration $\mathcal{F}$, si pour tout $A \in \mathcal{G}$, la suite de processus $(\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_\cdot])_n$ converge en probabilité vers le processus $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\cdot]$ au sens de la topologie J_1 de Skorokhod. Ici, nous n'utiliserons pas cette convergence car, pour l'étude des liens entre convergence de processus et convergence des filtrations associées, la convergence faible des filtrations est la plus appropriée. En effet, la tribu $\mathcal{G}$ contient trop d'information par rapport à $\mathcal{F}_T$ si l'inclusion de $\mathcal{F}_T$ dans $\mathcal{G}$ est stricte. Dans la suite, si cela n'est pas précisé, « convergence de filtrations » signifie « convergence faible de filtrations ».

Comme indiqué dans [16], on a immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.25 *Une suite* $(\mathcal{A}^n)_n$ *de tribus converge vers* $\mathcal{A}$ *si et seulement si pour toute variable aléatoire* Z *mesurable par rapport à* $\mathcal{A}$ *et intégrable, la suite de variables aléatoires* $(\mathbb{E}[Z|\mathcal{A}^n])$ *converge en probabilité vers* Z*.*

Proposition 1.1.26 *Une suite* $(\mathcal{F}^n)_n$ *de filtrations converge vers* $\mathcal{F}$ *si et seulement si pour toute variable aléatoire* Z *mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_T$ *et intégrable, la suite de processus* $(\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}^n])$ *converge en probabilité vers* $\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}]$ *au sens de la topologie* J_1 *de Skorokhod.*

Grâce à la proposition 1.1.14 qui permet d'écrire la convergence en probabilité de processus pour la topologie de Skorokhod à l'aide de suite de changements de temps, la définition de la convergence de filtrations peut se réécrire de la façon suivante :

Proposition 1.1.27 $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$ *si et seulement si pour tout* $B \in \mathcal{F}_T$*, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une suite* $(\Lambda^n)_n$ *de changements de temps convergeant uniformément en probabilité vers l'identité et telle que* $(\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_\cdot] \circ \Lambda^n)_n$ *converge uniformément en probabilité vers* $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_\cdot]$*.*

Dans [16], Coquet, Mémin et Słomiński donnent la caractérisation suivante de la convergence de filtrations dans le cas où la filtration limite est engendrée par un processus.

Lemme 1.1.28 *Soit X un processus càdlàg et $\mathcal{F}^X$ la filtration engendrée par ce processus. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$,
(ii) $\mathbb{E}[f(X_{t_1},\dots,X_{t_k})|\mathcal{F}^n_\cdot] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[f(X_{t_1},\dots,X_{t_k})|\mathcal{F}_\cdot]$ *pour la topologie J_1 de Skorokhod, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ bornée continue et tout point $t_1,\dots t_k$ tel que $\forall i$, $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$ ou $t_i = T$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*
(iii) $\mathbb{E}[\sum_{j=1}^m c_j \exp\{i\sum_{l=1}^k \lambda_j^l X_{t_l}\}|\mathcal{F}^n_\cdot] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\sum_{j=1}^m c_j \exp\{i\sum_{l=1}^k \lambda_j^l X_{t_l}\}|\mathcal{F}^X_\cdot]$ *pour la topologie J_1 de Skorokhod, pour tout $(c_1,\dots,c_m) \in \mathbb{R}^m$ et tout $(\lambda_1^l,\dots,\lambda_m^l) \in \mathbb{R}^m$, pour tout point $t_1,\dots t_k$ tel que $\forall i$, $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$ ou $t_i = T$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Voici une caractérisation analogue de la convergence de tribus dans le cas où la tribu limite est engendrée par un processus.

Lemme 1.1.29 *Soit Y un processus càdlàg, $\mathcal{A} = \sigma(Y_t, t \in [0,T])$ et $(\mathcal{A}^n)$ une suite de tribus. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$,
(ii) $\mathbb{E}[f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})|\mathcal{A}^n] \xrightarrow{\mathbb{P}} f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})$ *pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $t_1,\dots,t_k$ points d'un ensemble dense D contenant T.*

Démonstration
Les arguments sont les mêmes que dans la démonstration du lemme 3 dans [16].
$(i) \Rightarrow (ii)$ découle de la définition de la convergence des tribus.
Soit $A \in \mathcal{A}$. Soit $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $t_1,\dots,t_k \in D$ tels que

$$\mathbb{E}[|f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k}) - \mathbf{1}_A|] < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{A}^n] - \mathbf{1}_A| \geqslant \eta] \\
&\leqslant \mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{A}^n] - \mathbb{E}[f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})|\mathcal{A}^n]| \geqslant \eta/3] \\
&\quad +\mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})|\mathcal{A}^n] - f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})| \geqslant \eta/3] \\
&\quad +\mathbb{P}[|f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k}) - \mathbf{1}_A|] \geqslant \eta/3] \\
&\leqslant \mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})|\mathcal{A}^n] - f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k})| \geqslant \eta/3] \\
&\quad +\frac{6}{\eta}\mathbb{E}[|f(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k}) - \mathbf{1}_A|] \quad \text{d'après l'inégalité de Markov} \\
&\leqslant \left(\frac{6}{\eta}+1\right)\varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand en utilisant } (ii) \text{ et } (1.1).
\end{aligned}$$

D'où l'équivalence. □

Remarque 1.1.30 Typiquement l'ensemble D pourra être l'ensemble des points où le processus Y est continu en probabilité auquel on rajoute le point T.

La convergence étendue d'Aldous

Dans son manuscrit [2], Aldous a développé la notion de convergence étendue. Étant donnée une suite de processus, il introduit la suite de processus de prédiction associée et définit alors la convergence étendue en loi. Dans la proposition 6.8 de [2], il caractérise la notion de convergence étendue à l'aide de convergences d'espérances conditionnelles.

Définition 1.1.31 *Soit des processus càdlàg X^n, X et leurs filtrations continues à droite naturelles $\mathcal{F}^n$, $\mathcal{F}$. $(X^n, \mathcal{F}^n) \to (X, \mathcal{F})$ si et seulement si pour tout entier k, pour toutes fonctions $\phi_1, \ldots, \phi_k : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continues bornées, on a (au sens de la topologie J_1) :*

$$(X^n, \mathbb{E}[\phi_1(X^n)|\mathcal{F}^n_\cdot], \ldots, \mathbb{E}[\phi_k(X^n)|\mathcal{F}^n_\cdot]) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \mathbb{E}[\phi_1(X)|\mathcal{F}_\cdot], \ldots, \mathbb{E}[\phi_k(X)|\mathcal{F}_\cdot]).$$

Dans le cas où tous les processus sont définis sur le même espace, on peut parler de convergence étendue en probabilité qui sera définie de la façon suivante.

Définition 1.1.32 *Soit des processus càdlàg X^n, X et leurs filtrations continues à droite naturelles $\mathcal{F}^n$, $\mathcal{F}$. $(X^n, \mathcal{F}^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, \mathcal{F})$ si et seulement si pour toute fonction $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a (au sens de la topologie J_1) :*

$$(X^n, \mathbb{E}[h(X^n)|\mathcal{F}^n_\cdot]) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, \mathbb{E}[h(X)|\mathcal{F}_\cdot]).$$

On constate immédiatement que la convergence étendue en probabilité entraîne automatiquement la convergence de processus et la convergence de filtrations. En revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie. Dans [41], Mémin donne un exemple d'une telle situation. Soit N un processus de Poisson et $\mathcal{F}$ sa filtration propre. On considère ensuite la suite (N^n) définie par $N^n_t = N_{t-1/n}$ pour tout t et $\mathcal{F}^n_t = \mathcal{F}_t$. Alors, $N^n \xrightarrow{\mathbb{P}} N$, $\mathcal{F}^n \to \mathcal{F}$ mais $(N^n, \mathcal{F}^n) \stackrel{\mathbb{P}}{\not\to} (N, \mathcal{F})$.

Cependant, comme le montrent Coquet, Mémin et Słomiński dans [16], cette réciproque est vraie dans un certain nombre de situations.

Proposition 1.1.33 *Soit (X^n) une suite de processus càdlàg telle que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Soit $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ les filtrations naturelles associées à ces processus. On suppose que $\mathcal{F}^n \to \mathcal{F}$ et que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

i) X est continu,
ii) Toute $\mathcal{F}$-martingale est continue,
iii) Pour tout n, X^n est une $\mathcal{F}^n$-martingale, et X est une $\mathcal{F}$-martingale.

Alors $(X^n, \mathcal{F}^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, \mathcal{F})$.

La condition d'Aldous

Dans les articles [1] et [3], Aldous s'intéresse au critère de tension suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \to +\infty} \sup_{\sigma, \nu \in \mathcal{T}^n, \sigma \leqslant \nu \leqslant \sigma + \delta} \mathbb{P}[|X^n_\sigma - X^n_\nu| \geqslant \varepsilon] = 0 \tag{1.2}$$

où $\mathcal{T}^n$ est l'ensemble des temps d'arrêt pour la filtration engendrée par X^n. Il donne plusieurs résultats liant ce critère et la convergence en loi de suites de processus.

Cette condition d'Aldous sera une des hypothèses figurant dans les résultats du chapitre 2 sur les convergences de réduites et de temps d'arrêt optimaux et permettra notamment d'utiliser les propositions 1.1.34 et 1.1.38 ci-dessous.

Sous cette condition, dans son manuscrit non publié [2], Aldous donne le résultat suivant liant convergence de temps d'arrêts et convergence de processus :

Proposition 1.1.34 *Soit $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg qui converge en loi vers un processus càdlàg X. On note $\mathcal{F}^n$ les filtrations engendrées par les processus X^n et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à celle engendrée par le processus X. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt qui converge en loi vers une variable aléatoire V. On suppose que l'on a convergence en loi du couple $((\tau^n, X^n))_n$ vers (V, X) et que le critère de tension d'Aldous (1.2) est vérifié. Alors $(\tau^n, X^n_{\tau^n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (V, X_V)$.*

D'autre part, ce critère de tension d'une suite de processus a des liens avec la notion de quasi-continuité à gauche d'un processus.

Définition 1.1.35 *Un processus càdlàg X est quasi-continu à gauche si $\Delta X_\tau = 0$ p.s. pour tout temps d'arrêt prévisible τ (à valeurs dans $[0, T]$).*

Dans la remarque VI 4.7 dans [27], Jacod et Shiryaev indiquent la propriété suivante :

Proposition 1.1.36 *X est quasi-continu à gauche si et seulement si X vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2).*

Cette caractérisation des processus quasi-continus à gauche permet de montrer le lemme ci-dessous que nous utiliserons dans la section 1.1.4.

Lemme 1.1.37 *Soit X un processus quasi-continu à gauche et $\mathcal{F}$ sa filtration propre. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt qui converge en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. Alors $X_{\tau^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\tau$.*

DÉMONSTRATION
Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.
Comme X est quasi-continu à gauche, X vérifie le critère d'Aldous. Aussi, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{\sigma,\nu \in \mathcal{T}, \sigma \leqslant \nu \leqslant \sigma+\delta} \mathbb{P}[|X_\sigma - X_\nu| \geqslant \eta] \leqslant \varepsilon \tag{1.3}$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.
D'autre part, comme $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}[|\tau^n - \tau| \geqslant \delta] \leqslant \varepsilon. \tag{1.4}$$

Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|X_{\tau^n} - X_\tau| \geqslant \eta] &= \mathbb{P}[|X_{\tau^n} - X_\tau|\mathbf{1}_{|\tau^n-\tau|<\delta} \geqslant \eta] + \mathbb{P}[|X_{\tau^n} - X_\tau|\mathbf{1}_{|\tau^n-\tau|\geqslant\delta} \geqslant \eta] \\ &\leqslant \sup_{\sigma,\nu \in \mathcal{T}, \sigma \leqslant \nu \leqslant \sigma+\delta} \mathbb{P}[|X_\sigma - X_\nu| \geqslant \eta] + \mathbb{P}[|\tau^n - \tau| \geqslant \delta] \\ &\leqslant 2\varepsilon \quad \text{d'après (1.3) et (1.4).} \end{aligned}$$

Le lemme 1.1.37 est alors prouvé. □

Dans le cas d'une suite convergente de processus, Aldous montre la proposition suivante dans son manuscrit non publié [2].

Proposition 1.1.38 *Si $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2), alors X est quasi-continu à gauche (pour sa filtration propre).*

Il donne également une réciproque sous une hypothèse de convergence étendue.

Proposition 1.1.39 *Si $(X^n, \mathcal{F}^n) \to (X, \mathcal{F})$ et si X est quasi-continu à gauche, alors la suite (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2).*

Remarque 1.1.40 Si on remplace l'hypothèse de convergence étendue par une hypothèse de convergence de processus en probabilité et une hypothèse de convergence de filtrations, le résultat n'est plus forcément vrai comme le montre l'exemple suivant. On considère un processus de Poisson N et la filtration qu'il engendre $\mathcal{F}$, puis les processus N^n tels que, pour tout t, $N^n_t = N_{t-1/n}$. Par construction, les N^n sont $\mathcal{F}$ adaptés et on a convergence en probabilité de la suite (N^n) vers le processus N pour la topologie de Skorokhod. Soit τ le temps d'arrêt égal au premier instant de saut de N et $\tau^n = \tau + 1/n$. (τ^n) est une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt qui converge presque sûrement vers τ. Cependant, $N^n_\tau - N^n_{\tau^n} = 1$ *p.s.* et par conséquent le critère de tension d'Aldous n'est pas vérifié par la suite (N^n).

1.1.3 Lien entre convergence de filtration et convergence ponctuelle des tribus

Dans cette partie, on considère des filtrations $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$.

Dans leur article [16], Coquet, Mémin et Słomiński signalent que la convergence ponctuelle en tout point des tribus $\mathcal{F}^n_t \to \mathcal{F}_t$, $\forall t$ n'entraîne pas la convergence des filtrations $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$ et que la réciproque n'est pas vérifiée non plus.

On va ici affiner quelque peu ces liens. On va montrer que la convergence des filtrations $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$ entraîne la convergence des tribus $\mathcal{F}^n_t \to \mathcal{F}_t$ en tout point t où $\mathcal{F}$ est continue à gauche. Avant de montrer cette propriété, nous allons définir la notion de continuité d'une filtration et indiquer un lien entre la régularité d'une filtration et celle d'une martingale associée.

Définition 1.1.41 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration.*
$\mathcal{F}$ est continue à droite en t si $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.
$\mathcal{F}$ est continue à gauche en t si $\mathcal{F}_t = \bigvee_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t-\varepsilon}$.

Voyons le lien entre la continuité en t de la filtration $\mathcal{F}$ et la continuité en probabilité des martingales associées.

Proposition 1.1.42 *Soit X une variable aléatoire intégrable.*
Si $\mathcal{F}$ est continue à gauche en t, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_.]$ est continue à gauche en probabilité en t.
Si $\mathcal{F}$ est continue en t, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_.]$ est continue en probabilité en t.

DÉMONSTRATION
Soit (t_n) une suite croissant vers t. Comme $\mathcal{F}$ est continue à gauche en t, $\mathcal{F}_t = \bigvee_n \mathcal{F}_{t_n}$.
Alors d'après le théorème de convergence de martingales 31 du chapitre VI dans Dellacherie et Meyer [18], on a $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{t_n}] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$. $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_.]$ est donc continue à gauche en probabilité au point t.
D'autre part, comme $\mathcal{F}$ est continue à droite, d'après le théorème 4 du chapitre VI dans [18], il existe une version càdlàg de $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_.]$. Par conséquent, $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_.]$ est continue à droite en probabilité en t pour cette version qui sera toujours privilégiée.
D'où la continuité cherchée. □

Voyons maintenant un lien entre convergence de filtrations et convergence ponctuelle des tribus associées.

Proposition 1.1.43 *Soit $(\mathcal{F}^n)$ une suite de filtrations qui converge vers la filtration $\mathcal{F}$. Alors, en tout point t de continuité à gauche de $\mathcal{F}$, la suite de tribus $(\mathcal{F}^n_t)$ converge vers la tribu $\mathcal{F}_t$.*

DÉMONSTRATION
Soit t un point de continuité de $\mathcal{F}$. Soit $A \in \mathcal{F}_t$.
$\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$, donc $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_.] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]$ pour J_1. Soit (Λ^n) une suite de changements de temps associée. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_t] - \mathbf{1}_A| > \varepsilon\right] \\
&\quad \leqslant \mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_t] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] + \mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t) - \mathbf{1}_A\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right].
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_t] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&\quad \leqslant \quad \mathbb{P}\left[\sup_s |\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_.]\circ\Lambda^n(s) - \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_s]| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&\quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0 \text{ par choix de } (\Lambda^n)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t) - \mathbf{1}_A\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&= \quad \mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t) - \mathbf{1}_A\right| \mathbf{1}_{\{(\Lambda^n)^{-1}(t)\leqslant t\}} > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&\qquad + \mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t) - \mathbf{1}_A\right| \mathbf{1}_{\{(\Lambda^n)^{-1}(t)>t\}} > \frac{\varepsilon}{2}\right] \\
&= \quad \mathbb{P}\left[\left|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_.]\circ(\Lambda^n)^{-1}(t) - \mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_t]\right| \mathbf{1}_{\{(\Lambda^n)^{-1}(t)\leqslant t\}} > \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad \text{car } A \in \mathcal{F}_t \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0
\end{aligned}$$

car $(\Lambda^n)^{-1}(t) \to t$, $\mathcal{F}$ est continue à gauche en t et en utilisant la proposition 1.1.42. D'où la conclusion. $\square$

Intéressons nous maintenant au cas de filtrations engendrées par des processus. Soit (X^n) et X des processus càdlàg et $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ les filtrations qu'ils engendrent. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. On sait que l'on n'a pas toujours la convergence des filtrations $\mathcal{F}^n$ vers $\mathcal{F}$ comme le montre l'exemple de la Section 2 de Coquet, Mémin et Mackevičius dans [15].

Dans le cas des discrétisés, les filtrations $\mathcal{F}^n$ sont incluses dans la filtration $\mathcal{F}$. Cette propriété permet d'obtenir le lemme suivant qui donne des relations entre les tribus $\mathcal{F}^n_t$ et $\mathcal{F}_t$ pour tout t.

Lemme 1.1.44 *Soit X un processus càdlàg. On considère une suite $(\pi^n) = (\{t^n_k\})$ une suite de subdivisions de pas $|\pi^n| = \max_k |t^n_{k+1} - t^n_k|$ tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. On définit ensuite les processus discrétisés X^n par $X^n_t = X_{t^n_k}$ si $t \in [t^n_k, t^n_{k+1}[$. Alors pour tout t, $\mathcal{F}_{t-} \subset \bigvee_n \mathcal{F}^n_t \subset \mathcal{F}_t$.*

Démonstration
Soit t fixé. On a :

$$\mathcal{F}_{t-} = \sigma(X_s, s < t),\ \mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leqslant t) \text{ et } \mathcal{F}^n_t = \sigma(X_{t^n_k}, t^n_k \leqslant t).$$

- Pour tout n, $\mathcal{F}^n_t \subset \mathcal{F}_t$ donc $\bigvee_n \mathcal{F}^n_t \subset \mathcal{F}_t$.

- Montrons que $\mathcal{F}_{t-} \subset \bigvee_n \mathcal{F}^n_t$.
Soit $A \in \mathcal{F}_{t-}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \ldots, t_k \in [0, t[$ des points de continuité en probabilité de X et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathbb{E}[|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) \in B}|] \leqslant \varepsilon. \tag{1.5}$$

Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les pavés, il existe un pavé $B_1 \times \ldots \times B_k$ où les B_i sont à frontière négligeable pour la loi de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ tel que

$$\mathbb{E}[|\mathbf{1}_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) \in B} - \mathbf{1}_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) \in B_1 \times \ldots \times B_k}|] \leqslant \varepsilon. \tag{1.6}$$

X est càdlàg, $|\pi^n| \to 0$ et les t_k sont strictement inférieurs à t, donc pour tout i, il existe n_i tel que pour tout $n \geqslant n_i$, il existe $t^n_{l_i} \in \pi^n$ tel que

$$\mathbb{E}[|\mathbf{1}_{X_{t_i} \in B_i} - \mathbf{1}_{X_{t^n_{l_i}} \in B_i}|] \leqslant \varepsilon.$$

Soit $N = \max_i n_i$. D'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant N$, il existe $(t^n_{l_1}, \ldots, t^n_{l_k}) \in \pi^n$ tel que

$$\mathbb{E}[|\mathbf{1}_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_k}) \in B_1 \times \ldots \times B_k} - \mathbf{1}_{(X_{t^n_{l_1}},\ldots,X_{t^n_{l_k}}) \in B_1 \times \ldots \times B_k}|] \leqslant \varepsilon. \tag{1.7}$$

Par conséquent, d'après (1.5), (1.6) et (1.7),

$$\mathbb{E}[|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{(X_{t^n_{l_1}},\ldots,X_{t^n_{l_k}}) \in B_1 \times \ldots \times B_k}|] \leqslant 3\varepsilon.$$

Aussi, $A \in \bigvee_n \mathcal{F}_t^n$.

Le lemme est alors prouvé. □

On en déduit le résultat suivant de convergence ponctuelle de tribus.

Proposition 1.1.45 *Soit (π^n) une suite croissante de subdivisions de $[0,T]$ de pas tendant vers 0. Soit X un processus càdlàg et (X^n) la suite des discrétisés associés suivant la suite de subdivisions (π^n). Notant respectivement $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^n$ les filtrations engendrées par X et X^n, on a la convergence de la suite de tribus $(\mathcal{F}_t^n)$ vers $\mathcal{F}_t$ en tout point t où $\mathcal{F}$ est continue à gauche.*

Démonstration
Soit t un instant où $\mathcal{F}$ est continue à gauche. D'après le lemme précédent, $\bigvee_n \mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}_t$. De plus, la suite de subdivisions $(\pi^n)_n$ est croissante, donc la suite de tribus $(\mathcal{F}^n)$ est croissante pour l'inclusion. En utilisant le théorème de convergence des martingales fermées, on obtient le résultat annoncé. □

En utilisant la caractérisation de la convergence des tribus du lemme 1.1.29, on obtient un autre résultat de convergence ponctuelle.

Proposition 1.1.46 *Si $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $\mathcal{F}_t^n \to \mathcal{F}_t$ pour tout t tel que $\mathbb{P}[\Delta X_t \neq 0] = 0$.*

Démonstration
On fixe t.
Soit $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continue bornée et $t_1, \ldots, t_k \leqslant t$ des points tels que pour tout i, $\mathbb{P}[|\Delta X_{t_i}| > 0] = 0$.
Comme $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$,

$$(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}).$$

f est continue bornée, donc :

$$f(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n) \xrightarrow{L^1} f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}). \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})|\mathcal{F}_t^n] - f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})| \geqslant \eta] \\
&\leqslant \mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})|\mathcal{F}_t^n] - \mathbb{E}[f(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n)|\mathcal{F}_t^n]| \geqslant \eta/2] \\
&\quad + \mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n)|\mathcal{F}_t^n] - f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})| \geqslant \eta/2] \\
&\leqslant \frac{4}{\eta}\mathbb{E}[|f(X_{t_1}^n, \ldots, X_{t_k}^n) - f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})|] \\
&\qquad \text{d'après l'inégalité de Markov} \\
&\to 0 \quad \text{d'après (1.8).}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 1.1.29, $\mathcal{F}_t^n \to \mathcal{F}_t$. □

Remarque 1.1.47 Si un processus est continu à gauche en t, alors la filtration qu'il engendre est aussi continue à gauche en t (cf problème 7.1 *ii* de Karatzas et Shreve [32]). Ainsi quand on considère les discrétisés construits comme dans la proposition 1.1.45, le résultat de la proposition 1.1.46 est plus fort que celui de la proposition 1.1.45.

Remarque 1.1.48 La convergence des tribus de la proposition 1.1.46 n'a pas forcément lieu en dehors des points de continuité en probabilité du processus comme le montre l'exemple suivant. On pose

$$X_t = \varepsilon \mathbf{1}_{[1/2,1]}(t),\ X_t^n = \varepsilon \mathbf{1}_{[1/2+1/n,1]}(t),\ t \in [0,1],\ \varepsilon \sim \mathcal{B}er(\{-1,1\},1/2).$$

Alors $X^n \xrightarrow{p.s.} X$, mais $\mathcal{F}_{1/2}^n = \{\emptyset, \Omega\} \not\to \mathcal{F}_{1/2} = \sigma(\varepsilon)$.

1.1.4 Convergence de filtrations arrêtées

Définitions et premières propriétés

Définition 1.1.49 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une filtration et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. On définit la tribu $\mathcal{F}_\tau$ par $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_T : A \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s, \forall s\}$ et la filtration arrêtée $\mathcal{F}^\tau$ par $\mathcal{F}_t^\tau = \mathcal{F}_{\tau\wedge t} = \{A \in \mathcal{F}_t : A \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s, \forall s \leqslant t\}$, pour tout t.*

Remarque 1.1.50 La définition de $\mathcal{F}_\tau$ a un sens même si τ n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Cependant, $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu si et seulement si τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.
En effet, par définition, $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$ si et seulement si pour tout t, $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Ainsi, si τ n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, $\Omega \notin \mathcal{F}_\tau$ et $\mathcal{F}_\tau$ n'est donc pas une tribu.
D'autre part, si τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, on a :
- $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$,
- si $A \in \mathcal{F}_\tau$, pour tout t, $A^c \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ car τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, et par conséquent $A^c \in \mathcal{F}_\tau$,
- si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{F}_\tau$, $\cup_n A_n \in \mathcal{F}_\tau$.
Donc, $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu.

Remarque 1.1.51 La famille $(\mathcal{F}_t^\tau)$ définie précédemment est bien une filtration puisque, si τ et σ sont deux $\mathcal{F}$-temps d'arrêt tels que $\tau \leqslant \sigma$, alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$ (cf lemme 7.1 dans Kallenberg [31]).

Voyons tout d'abord quelques propriétés de régularité de $\mathcal{F}^\tau$ que l'on peut déduire de celles de $\mathcal{F}$.

Proposition 1.1.52 *Si $\mathcal{F}$ est continue à droite en t, alors $\mathcal{F}^\tau$ est continue à droite en t.*

Démonstration
Supposons $\mathcal{F}$ continue à droite en t.
On va montrer que $\mathcal{F}_t^\tau = \underset{\varepsilon>0}{\cap} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^\tau$.
Soit $A \in \underset{\varepsilon>0}{\cap} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^\tau$. On a :
- pour tout $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ donc $A \in \underset{\varepsilon>0}{\cap} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ et $\underset{\varepsilon>0}{\cap} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}$ continue à droite en t,
- pour tout $s \leqslant t$, $A \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s$ car $A \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^\tau$.
Donc $A \in \mathcal{F}_t^\tau$. L'autre inclusion étant triviale, on a la continuité à droite de $\mathcal{F}^\tau$ en t. □

On verra plus loin un résultat de continuité à gauche dans le cas où $\mathcal{F}$ est engendrée par un processus.

Le lemme suivant montre que, sous l'hypothèse de convergence de filtrations, pour avoir la convergence des filtrations arrêtées il suffit de montrer la convergence des tribus terminales associées. Ce lemme sera ensuite systématiquement utilisé pour prouver la convergence des filtrations arrêtées.

Lemme 1.1.53 *Soit $(\mathcal{F}^n)$ une suite de filtrations convergeant vers la filtration $\mathcal{F}$. Soit (τ^n) une suite de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt convergeant en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. Si on a convergence des tribus $\mathcal{F}^n_{\tau^n}$ vers $\mathcal{F}_\tau$, alors on a convergence des filtrations $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$ vers $\mathcal{F}^\tau$.*

DÉMONSTRATION
Soit $B \in \mathcal{F}_\tau$.
$\mathcal{F}^n_{\tau^n} \to \mathcal{F}_\tau$, donc par définition $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{\tau^n}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{1}_B$. De plus, cette convergence a lieu dans L^1 par propriété d'équiintégrabilité. Comme $\mathcal{F}^n \to \mathcal{F}$, d'après la remarque 1.2 dans Coquet, Mémin et Słominski [16], on a donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{\tau^n}]|\mathcal{F}^n_.] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_.] \quad \text{pour} \quad J_1. \tag{1.9}$$

Pour tout t, on a les égalités

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{\tau^n}]|\mathcal{F}^n_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{\tau^n\wedge t}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^\tau_t\right]$$

(cf propriété 1.2.17 dans Karatzas et Shreve [32], par exemple). Donc (1.9) se réécrit de la façon suivante :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_.] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^\tau_.] \quad \text{pour} \quad J_1.$$

D'où la convergence cherchée. □

Cas de temps d'arrêt prenant un nombre fini de valeurs

Proposition 1.1.54 *Soit $(\mathcal{F}^n)$ une suite de filtrations convergeant vers la filtration $\mathcal{F}$. Soit (τ^n) une suite de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt convergeant en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. On suppose que les τ^n et τ ne prennent qu'un même nombre fini de valeurs. On note $t_1, \ldots, t_N$ les valeurs prises par τ ordonnées par ordre croissant et on suppose que $\mathcal{F}$ est continue en tous les t_i. Alors $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.*

DÉMONSTRATION
On note $t^n_1, \ldots, t^n_N$ les valeurs prises par les τ^n ordonnées par ordre croissant, $A_i = \{\tau = t_i\}$ et $A^n_i = \{\tau^n = t^n_i\}$.
On va montrer que $\mathcal{F}^n_{\tau^n}$ converge vers $\mathcal{F}_\tau$ et conclure avec le lemme 1.1.53.
Soit $B \in \mathcal{F}_\tau$.

Remarquons tout d'abord que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_\tau] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}]\mathbf{1}_{A_i}$.

En effet, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_\tau] = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}_\tau]$ et, si on montre que $\forall A \in \mathcal{F}_\tau, \forall i, A \cap A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, alors $\forall i, \mathbb{E}[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}]\mathbf{1}_{A_i}$.

Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$. Montrons que, pour tout i, $A \cap A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$.
On raisonne par récurrence sur i.
Pour $i = 1$, $A \cap A_1 = A \cap \{\tau = t_1\} = A \cap \{\tau \leqslant t_1\} \in \mathcal{F}_{t_1}$ par définition de $\mathcal{F}_\tau$.
Supposons maintenant la propriété vraie au rang i. On a les relations suivantes

$$A \cap A_{i+1} = A \cap \{\tau = t_{i+1}\} = (A \cap \{\tau \leqslant t_{i+1}\}) \cap (A \cap \{\tau \leqslant t_i\})^c \in \mathcal{F}_{t_{i+1}}$$

en utilisant la définition de $\mathcal{F}_\tau$ et l'hypothèse de récurrence.
Aussi, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_\tau] = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}]\mathbf{1}_{A_i}$.

Pour montrer la convergence des tribus $\mathcal{F}^n_{\tau^n}$ vers $\mathcal{F}_\tau$, il suffit alors de montrer que

$$\forall i, \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{t_i^n}]\mathbf{1}_{A_i^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}]\mathbf{1}_{A_i}.$$

Soit $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$. On fixe i.
$\mathbb{P}[|\mathbf{1}_{A_i^n} - \mathbf{1}_{A_i}| \geqslant \eta] = \mathbb{P}[\{\tau^n = t_i^n\}\Delta\{\tau = t_i\}]$. Comme $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$, on a $\forall i, t_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} t_i$. Il existe donc n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \max_i |t_i^n - t_i| \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[|\tau^n - \tau| \geqslant \eta] \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}[|\mathbf{1}_{A_i^n} - \mathbf{1}_{A_i}| \geqslant \eta] \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, comme $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$, on a $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_.] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_.]$ pour J_1. t_i étant un point de continuité de $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}[|\Delta\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}]| > 0] = 0$. Par propriété de la convergence au sens de J_1, on a donc :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{t_i^n}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}].$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{t_i^n}]\mathbf{1}_{A_i^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_{t_i}]\mathbf{1}_{A_i}.$$

Puis,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{\tau^n}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}_\tau].$$

On a donc la convergence des tribus $\mathcal{F}_{\tau^n}$ vers $\mathcal{F}_\tau$, puis celle des filtrations $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$ vers $\mathcal{F}^\tau$, d'après le lemme 1.1.53. □

Cas de suites décroissantes de filtrations et de temps d'arrêt

Lemme 1.1.55 *Si $(\mathcal{F}^n)$ est une suite décroissante de filtrations convergeant vers la filtration $\mathcal{F}$ et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, il existe une suite décroissante (τ^n) de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt qui converge en probabilité vers τ.*

Démonstration
Soit (π^n) une suite croissante de subdivisions de $[0, T]$ de pas tendant vers 0. Pour tout n, on note $\pi^n = \{t_1^n = 0 < t_2^n < \ldots < t_{k^n}^n = T\}$. On définit :

$$\tau^n = \sum_{i=1}^{k^n-1} t_{i+1}^n \mathbf{1}_{t_i^n < \tau \leqslant t_{i+1}^n}.$$

$*$ Soit $n \geqslant 0$. τ^n est à valeurs dans π^n.
Soit $t \geqslant 0$. Il existe un unique i tel que $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$. On a :

$$\{\tau^n \leqslant t\} = \{\tau^n \leqslant t_i^n\} = \{\tau \leqslant t_i^n\} \in \mathcal{F}_{t_i^n} \quad \text{car } \tau \text{ est un } \mathcal{F}\text{-temps d'arrêt.}$$

Ainsi, $\{\tau^n \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Donc τ^n est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^n$, τ^n est a fortiori un $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt.
$*$ Il est clair par construction que (τ^n) décroît vers τ. □

On verra des prolongements de ce résultat dans la partie 1.2.3.

Proposition 1.1.56 *Soit $(\mathcal{F}^n)$ une suite décroissante de filtrations convergeant vers la filtration $\mathcal{F}$. Soit (τ^n) une suite décroissante de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt convergeant en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. Alors $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.*

Démonstration
On a, pour tout n,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau &\subset \mathcal{F}^n_\tau \quad \text{car } (\mathcal{F}^n) \text{ est décroissante} \\ &\subset \mathcal{F}^n_{\tau^n} \quad \text{car } (\tau^n) \text{ est décroissante et en utilisant la remarque 1.1.51.} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $B \in \mathcal{F}_\tau$, pour tout n, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_B|\mathcal{F}^n_{\tau^n}] - \mathbf{1}_B = 0$. Donc, $\mathcal{F}^n_{\tau^n} \to \mathcal{F}_\tau$. D'après le lemme 1.1.53, on a donc la convergence des filtrations arrêtées. □

Exemple 1.1.57 Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. On considère les temps d'arrêt τ^k définis par $\tau^k = \frac{j}{2^k}$ si $\frac{j-1}{2^k} < \tau \leqslant \frac{j}{2^k}$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}^k$ les filtrations telles que pour tout t, $\mathcal{F}^k_t = \mathcal{F}_{\frac{j}{2^k}}$ si $\frac{j-1}{2^k} < t \leqslant \frac{j}{2^k}$. Alors :
$\forall k$, τ^k est un $\mathcal{F}^k$-temps d'arrêt,
(τ^k) et $(\mathcal{F}^k)$ sont des suites décroissantes convergeant respectivement vers τ et $\mathcal{F}$.
Donc d'après la proposition 1.1.56, $\mathcal{F}^{k,\tau^k} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.

Cas où les filtrations sont engendrées par des processus

Dans l'article [21], Haezendonck et Delbaen donnent la caractérisation suivante de la tribu des événements antérieurs :

Proposition 1.1.58 *Soit X un processus càdlàg, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Alors $\mathcal{F}_\tau = \sigma(\{X_{\tau\wedge s}, s \geqslant 0\})$.*

Cette caractérisation nous montre que, sous les hypothèses de la proposition 1.1.58, la filtration arrêtée $\mathcal{F}^\tau$ est la filtration engendrée par le processus arrêté X^τ.

Proposition 1.1.59 *Soit X un processus càdlàg, $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par ce processus et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Si X est continu à gauche en t, alors la filtration arrêtée $\mathcal{F}^\tau$ associée est continue à gauche en t.*

Démonstration
X est continu à gauche en t, donc le processus arrêté X^τ est continu à gauche en t. De plus d'après la proposition 1.1.58, $\mathcal{F}_t^\tau = \sigma(X_s^\tau, s \leqslant t)$. Or, si un processus Y est continu à gauche en t, la filtration $\mathcal{F}^Y$ l'est aussi (cf problème 7.1 *ii* de Karatzas et Shreve [32]). Donc $\mathcal{F}^\tau$ est continue à gauche en t. □

En particulier, d'après les propositions 1.1.52 et 1.1.59, si $\mathcal{F}$ est une filtration brownienne, pour tout $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ, la filtration arrêtée $\mathcal{F}^\tau$ sera continue. Dans le chapitre 3, on considérera des EDSR dirigées par un mouvement brownien et d'instant terminal aléatoire τ. La filtration $\mathcal{F}^\tau$ interviendra naturellement dans ce cadre.

Grâce à cette caractérisation des filtrations arrêtées engendrées par des processus, on peut montrer le résultat suivant de convergence :

Théorème 1.1.60 *Soit (X^n) et X des processus càdlàg, $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ les filtrations associées telles que $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. Soit (τ^n) une suite de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt convergeant en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. On suppose que $X^{n,\tau^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X^\tau$ pour J_1. Alors $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.*

Démonstration
Comme τ et τ^n sont respectivement des $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt, d'après la proposition 1.1.58, on a les égalités $\mathcal{F}_\tau = \sigma(\{X_{\tau\wedge s}, s \geqslant 0\})$ et $\mathcal{F}^n_{\tau^n} = \sigma(\{X^n_{\tau^n\wedge s}, s \geqslant 0\})$.
Soit $t_1, \dots t_k$ des points de continuité de X^τ ou T et $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée.
Comme $X^{n,\tau^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X^\tau$, on a :

$$(X^n_{t_1\wedge\tau^n}, \dots, X^n_{t_k\wedge\tau^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau}).$$

Comme f est continue bornée, on a alors :

$$f(X^n_{t_1\wedge\tau^n}, \dots, X^n_{t_k\wedge\tau^n}) \xrightarrow{L^1} f(X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau}). \tag{1.10}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau})|\mathcal{F}^n_{\tau^n}] - f(X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau})| \geqslant \eta] \\
&\quad \leqslant \quad \mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau})|\mathcal{F}^n_{\tau^n}] - \mathbb{E}[f(X^n_{t_1\wedge\tau^n}, \dots, X^n_{t_k\wedge\tau^n})|\mathcal{F}^n_{\tau^n}]| \geqslant \eta/2] \\
&\quad\quad\quad + \mathbb{P}[|\mathbb{E}[f(X^n_{t_1\wedge\tau^n}, \dots, X^n_{t_k\wedge\tau^n})|\mathcal{F}^n_{\tau^n}] - f(X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau})| \geqslant \eta/2] \\
&\quad \leqslant \quad \frac{4}{\eta}\mathbb{E}[|f(X^n_{t_1\wedge\tau^n}, \dots, X^n_{t_k\wedge\tau^n}) - f(X_{t_1\wedge\tau}, \dots, X_{t_k\wedge\tau})|] \\
&\quad \to \quad 0 \ \text{ d'après (1.10).}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 1.1.29, $\mathcal{F}^n_{\tau^n} \to \mathcal{F}_\tau$. Puis d'après le lemme 1.1.53, $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.
□

On va appliquer ce théorème à un processus X quasi continu à gauche.

Corollaire 1.1.61 *Soit X un processus quasi continu à gauche, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ et τ et τ^n des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. On suppose que $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$. Alors $\mathcal{F}^{\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.*

DÉMONSTRATION
Il suffit de montrer que $X^{\tau^n}_. \xrightarrow{\mathbb{P}} X^{\tau}_.$ pour J_1.
Comme X est quasi continu à gauche, on a $X_{\tau^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\tau$ d'après le lemme 1.1.37.
D'autre part, $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ donc $\mathbf{1}_{\{.<\tau^n\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{1}_{\{.<\tau\}}$ pour J_1.
Comme X est continu en probabilité, $X_.\mathbf{1}_{\{.<\tau^n\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_.\mathbf{1}_{\{.<\tau\}}$ pour J_1.
Alors, comme $\mathbb{P}[\{t : \Delta(X_t\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}) \neq 0 \textit{ et } \Delta(X_\tau\mathbf{1}_{\{t\geqslant\tau\}}) \neq 0\}] = 0$, on a la convergence $X_.\mathbf{1}_{\{.<\tau^n\}} + X_{\tau^n}\mathbf{1}_{\{.\geqslant\tau^n\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_.\mathbf{1}_{\{.<\tau\}} + X_\tau\mathbf{1}_{\{.\geqslant\tau\}}$ pour J_1, *i.e.*

$$X^{\tau^n}_. \xrightarrow{\mathbb{P}} X^{\tau}_. \quad \text{pour} \quad J_1.$$

Alors d'après le théorème 1.1.60, $\mathcal{F}^{\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$. □

Voyons un autre corollaire dans le cas où la limite X est un processus continu.

Corollaire 1.1.62 *Soit (X^n) des processus càdlàg et X un processus continu, $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ les filtrations associées. Soit (τ^n) une suite de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt convergeant en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ pour J_1 et que $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. Alors on a la convergence des filtrations arrêtées $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.*

DÉMONSTRATION
D'après le théorème 1.1.60, il suffit de montrer que $X^{n,\tau^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X^\tau$ pour J_1.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.
X est continu sur le compact $[0,T]$ donc X est uniformément continu sur $[0,T]$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $s,t \in [0,T]$,

$$|s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow \mathbb{P}[|X_s - X_t| \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}[|\tau^n - \tau| \geqslant \alpha] \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et X est continu donc $\sup_t |X^n_t - X_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\mathbb{P}[\sup_t |X^n_t - X_t| \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\sup_t |X^{n,\tau^n}_t - X^\tau_t| \geqslant \eta] \\
&\leqslant \quad \mathbb{P}[\sup_t |X^n_{t\wedge\tau^n} - X_{t\wedge\tau^n}| \geqslant \eta/3] + \mathbb{P}[\sup_t |X_{t\wedge\tau^n} - X_{t\wedge\tau}|\mathbf{1}_{|\tau^n-\tau|<\alpha} \geqslant \eta/3] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}[\sup_t |X_{t\wedge\tau^n} - X_{t\wedge\tau}|\mathbf{1}_{|\tau^n-\tau|\geqslant\alpha} \geqslant \eta/3] \\
&\leqslant \quad \mathbb{P}[\sup_t |X^n_t - X_t| \geqslant \eta/3] + \varepsilon + \mathbb{P}[|\tau^n - \tau| \geqslant \alpha] \\
&\leqslant \quad 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où le corollaire 1.1.62. □

1.1.5 Cas d'un horizon infini

On peut généraliser les résultats précédents au cas où les processus ne sont plus indexés par $[0,T]$ avec $T<\infty$ mais par $[0,+\infty[$. C'est le cadre considéré par Jacod et Shiryaev dans [27]. Dans cette partie, on notera $\mathbb{D}$ l'ensemble des processus càdlàg indexés par $[0,+\infty[$.

On considère l'ensemble Λ des changements de temps de $[0,+\infty[$, *i.e.* l'ensemble des applications $\lambda:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ continues et strictement croissantes telles que $\lambda(0)=0$ et $\lambda(t)\to+\infty$ quand $t\to+\infty$.

Dans [27], Jacod et Shiryaev définissent la topologie de Skorokhod dans le cas d'un horizon infini et la caractérisent à l'aide du théorème VI 1.14. C'est cette caractérisation que nous prendrons ici comme définition.

Définition 1.1.63 *Soit $(\alpha_n),\alpha\in\mathbb{D}$. On dira que (α_n) converge vers α si et seulement si il existe une suite (λ_n) d'éléments de Λ telle que*

$$(i)\qquad \sup_{s\geqslant 0}|\lambda_n(s)-s|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$
$$(ii)\qquad \sup_{s\leqslant N}|\alpha_n\circ\lambda_n(s)-\alpha(s)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,\ \forall N\in\mathbb{N}^*.$$

Si on compare cette définition avec celle du cas $T<\infty$ de la section 1.1.1, on remarque que dans le cas T fini on a convergence uniforme de $(\alpha_n\circ\lambda_n)$ vers α sur tout l'intervalle $[0,T]$. En revanche, ici, on n'a pas convergence uniforme de $(\alpha_n\circ\lambda_n)$ vers α sur $[0,+\infty[$ mais sur tous les compacts de $[0,+\infty[$.

Grâce à la définition précédente, on va pouvoir étendre la notion de convergence de filtrations.

Définition 1.1.64 *Soit $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ des filtrations indexées par $[0,+\infty[$. On notera $\mathcal{F}_\infty$ la tribu définie par $\bigvee_t\mathcal{F}_t$. On dira que la suite de filtrations $(\mathcal{F}^n)$ converge vers $\mathcal{F}$ si et seulement si $\forall A\in\mathcal{F}_\infty$, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_\cdot]\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_\cdot]$, i.e. s'il existe une suite (Λ^n) de changements de temps aléatoires telle que*

$$(i)\qquad \sup_{s\geqslant 0}|\Lambda^n(s)-s|\xrightarrow{\mathbb{P}}0,$$
$$(ii)\qquad \sup_{s\leqslant N}|\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}^n_\cdot]\circ\Lambda^n(s)-\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_s]|\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\ \forall N\in\mathbb{N}^*.$$

Les définitions données ci-dessus laissent à penser que les résultats prouvés dans le cas d'un horizon fini vont rester vrais dans le cas d'un horizon infini. C'est en particulier le cas des résultats suivants qui généralisent la remarque 1.2 et la proposition 2 dans [16] et qui se démontrent de façon analogue. Ces résultats seront utiles dans le chapitre 3.

Lemme 1.1.65 *Si $X^n\xrightarrow{L^1}X$ et $\mathcal{F}^n\xrightarrow{w}\mathcal{F}$, alors $\mathbb{E}[X^n|\mathcal{F}^n_\cdot]\xrightarrow{\mathbb{P}}\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\cdot]$.*

Proposition 1.1.66 *Si (X^n) est une suite de processus à accroissements indépendants indexés par $[0, +\infty[$ telle que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $\mathcal{F}^{X^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^X$.*

De même, on peut généraliser la notion de tribu des événements antérieurs introduite dans la section 1.1.4 en posant :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s, \ \forall s \geqslant 0\}$$

où $\mathcal{F}$ est une filtration indexée par $[0, \infty[$, τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt et $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$. La caractérisation de la proposition 1.1.58 est toujours vraie d'après l'article [21]. Aussi le corollaire 1.1.62 est vérifié dans ce cas. Il s'énonce alors de la façon suivante :

Corollaire 1.1.67 *Soit (X^n) des processus càdlàg et X un processus continu indexés par $[0, +\infty[$, $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ les filtrations associées. Soit (τ^n) une suite de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt convergeant en probabilité vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ pour J_1 et que $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. Alors on a la convergence des filtrations arrêtées $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.*

1.2 Limite de suites de temps d'arrêt

On s'intéresse à la situation suivante. Soit $(\mathcal{F}^n)$ et $\mathcal{F}$ des filtrations. On suppose que $\mathcal{F}$ est continue à droite et complète. On considère une suite (τ^n) de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt qui converge vers une variable aléatoire τ. On va chercher des conditions pour que τ soit un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Cette question est au coeur des problématiques des deux chapitres suivants.

Pour donner une réponse, dans la section 1.2.1, on va considérer le cas où on a inclusion des filtrations, *i.e.* pour tout n , $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$. Dans ce cas, (τ^n) est a fortiori une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Dans leur article [6], Baxter et Chacon donnent un exemple où la limite en loi d'une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Nous allons détailler cet exemple. Ensuite, nous démontrerons que la limite en probabilité d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt (avec toujours $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$) est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Enfin, nous illustrerons ce résultat par le cas de temps d'entrée dans un ouvert quand on approche un processus par ses discrétisés, exemple qui sera utilisé pour illustrer les résultats du chapitre 3 sur les EDSR.

On considérera ensuite, dans la section 1.2.2, le cas où on a convergence faible de la suite de filtrations $(\mathcal{F}^n)$ vers la filtration $\mathcal{F}$. On prouvera alors que, sous une hypothèse de $\mathcal{F}_T$-mesurablité de τ, la limite en probabilité d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Ce résultat sera ensuite utilisé pour prouver des convergences de temps d'arrêt optimaux dans le chapitre 2.

Enfin, dans le cas où les filtrations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^n$ sont engendrées par des processus X et X^n tels que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, étant donné un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ, on verra comment construire une suite approchante de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt. La construction proposée est basée sur le fait que la suite de tribus $(\mathcal{F}^n_t)$ converge vers la tribu $\mathcal{F}_t$ pour tout t point de continuité en probabilité de X. Cette construction sera en partie utilisée dans la chapitre 2 pour prouver la convergence des réduites.

1.2.1 Résultats dans le cas d'inclusion de filtrations

Dans cette section, on suppose que pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$. (τ^n) est donc en particulier une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.

Dans le cas de la convergence en loi, la limite d'une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt n'est pas toujours un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Dans leur article [6], Baxter et Chacon donnent un exemple d'une telle situation. Cet exemple a ensuite été repris par Meyer dans [42]. Nous allons ici en donner le détail.

Soit (B_t) un mouvement brownien plan partant de 0 et $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par ce processus. On considère ensuite la suite de temps d'arrêt $(U_n)_n$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ U_n = \inf\left\{t > 0 : |B_t| = \frac{1}{n}\right\}.$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $s \in [0, \frac{1}{n}]$, on définit les processus $V_{n,s}$ par :

$$\forall s \in \left[0, \frac{1}{n}\right],\ V_{n,s} = \inf\left\{t \geqslant U_n : |B_t| = s \text{ ou } |B_t| = 1\right\}.$$

Comme B est un mouvement brownien, quand s varie de 0 à $1/n$, $\mathbb{P}[|B_{V_{n,s}}| = s]$ varie de 0 à 1. Pour tout n, on choisit $s(n) \in [0, 1/n]$ tel que

$$\mathbb{P}\left[\left|B_{V_{n,s(n)}}\right| = s(n)\right] = \frac{1}{2}.$$

On considère alors la suite $(\tau_n)_n$ définie par

$$\tau_n = V_{n,s(n)}.$$

Par définition de $s(n)$, $\mathbb{P}[|B_{\tau_n}| = s(n)] = \frac{1}{2}$. Or, par définition de $V_{n,s(n)}$ donc de τ_n, $|B_{\tau_n}| = s(n)$ ou 1. On a donc

$$\mathbb{P}[|B_{\tau_n}| \leqslant 1/n] = \mathbb{P}[|B_{\tau_n}| = s(n)] = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}[|B_{\tau_n}| = 1] = \frac{1}{2}. \tag{1.11}$$

(τ_n) est tendue car, pour tout n, $\tau^n = V_{n,s(n)} \leqslant U_1$ et U_1 est fini *p.s.* Aussi, $((B, \tau_n))_n$ est tendue. On peut donc extraire une sous-suite convergente. Pour alléger les notations, on notera encore $((B, \tau_n))_n$ cette sous-suite. Il existe donc (B, τ) tel que

$$(B, \tau_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B, \tau).$$

Alors, $B_{\tau_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} B_\tau$. En faisant tendre n vers l'infini dans (1.11), on trouve :

$$\mathbb{P}[|B_\tau| = 0] = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}[|B_\tau| = 1] = \frac{1}{2}.$$

On va montrer que τ n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.
$\{\tau = 0\} \in \mathcal{F}_0$. Or $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Donc, $\{\tau = 0\} = \emptyset$ ou Ω.
Si $\{\tau = 0\} = \emptyset$, alors $\mathbb{P}[|B_\tau| = 0] = 0$ car la probabilité de revenir en 0 est nulle. Ceci est en contradiction avec le fait que $\mathbb{P}[|B_\tau| = 0] = 1/2$.
Si $\{\tau = 0\} = \Omega$, alors $\mathbb{P}[|B_\tau| = 0] = 1$, ce qui contredit le fait que $\mathbb{P}[|B_\tau| = 0] = 1/2$.
Donc τ n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.

En revanche, toujours sous hypohtèse d'inclusion des filtrations, la limite en probabilité d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.

Proposition 1.2.1 *On suppose que $\mathcal{F}$ est continue à droite et que, pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt qui converge en probabilité vers une variable aléatoire τ. Alors τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.*

Démonstration
Soit $t \in \{s : \mathbb{P}[\tau = s] = 0\}$.
$\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ et $\mathbb{P}[\tau = t] = 0$ donc $\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$. Alors,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} | \mathcal{F}_t] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}} | \mathcal{F}_t].$$

Mais, $\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} | \mathcal{F}_t]$ car $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$ et τ^n est un $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt.
Donc, par unicité de la limite, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$ *p.s.* Aussi $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

Comme τ est une variable aléatoire, $\{t : \mathbb{P}[\tau = t] \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Soit t tel que $\mathbb{P}[\tau = t] \neq 0$. Il existe une suite $(t^n)_n$ décroissant vers t telle que pour tout n, $\mathbb{P}[\tau = t^n] = 0$. Alors $\{\tau \leqslant t\} = \bigcap_n \{\tau \leqslant t^n\}$. Or pour tout n, $\{\tau \leqslant t^n\} \in \mathcal{F}_{t^n}$. Donc $\{\tau \leqslant t\} \in \bigcap_n \mathcal{F}_{t^n}$. Mais $\bigcap_n \mathcal{F}_{t^n} = \mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}$ est continue à droite.
D'où pour tout t, $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, *i.e.* τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. $\square$

Appliquons ce résultat dans le cas de temps d'entrée dans un ouvert pour des processus indexés par $\mathbb{R}^+$.

Proposition 1.2.2 *Soit X un processus continu à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ partant de 0 et (X^n) une suite de discrétisés selon une suite croissante de subdivisions $(\pi^n) = (\{t_i^n\})$ de pas tendant vers 0. Soit $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par X et $\mathcal{F}^n$ celles engendrées par les X^n. On suppose que $\mathcal{F}$ est continue à droite. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas 0 et O_n une suite croissante (pour l'inclusion) d'ouverts telle que $\bigcup_n O_n = O$. On considère les temps d'arrêt suivants :*

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t \in O\} \quad \textit{et} \quad \tau^n = \inf\{t \in]0, n] : X_t^n \in O_n\} \wedge n$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. *Alors $\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau$.*

Démonstration
$(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt. On va d'abord montrer que la suite (τ^n) converge presque sûrement et ensuite on montrera que la limite est égale à τ *p.s.*

Fixons ω.
Si, pour tout n, $\tau^n(\omega) = n$, alors $\tau^n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Sinon, il existe n_0 tel que $\tau^{n_0}(\omega) < n_0$. Montrons que $(\tau^n(\omega))_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. $(X^n(\omega))$ est constant par morceaux donc $\tau^n(\omega)$ est l'un des t_i^n. Il existe donc i tel que pour tout $j < i$, $X_{t_j^n}(\omega) \notin O_n$ et $X_{t_i^n}(\omega) \in O_n$. Comme (π^n) est croissante, il existe l avec $t_l^{n+1} \leqslant t_i^n$ tel que pour tout $j < l$, $X_{t_j^{n+1}} \notin O_n$ et $X_{t_l^{n+1}}(\omega) \in O_n$. Mais, $O_n \subset O_{n+1}$, donc on atteint O_{n+1} avant O_n. Autrement dit, il existe $k \leqslant l$ tel que pour tout $j < k$, $X_{t_j^{n+1}}(\omega) \notin O_{n+1}$ et $X_{t_k^{n+1}}(\omega) \in O_{n+1}$. Finalement, $\tau^{n+1}(\omega) = t_k^{n+1} \leqslant t_i^n = \tau^n(\omega)$. Donc $(\tau^n(\omega))$ est une suite décroissante. De plus, cette suite est minorée donc elle converge.

(τ^n) converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire $\tilde{\tau}$. $\tilde{\tau}$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt d'après la proposition 1.2.1. Pour conclure, il reste à montrer que $\tilde{\tau} = \tau$ *p.s.*

Montrons tout d'abord que $\tilde{\tau} \geqslant \tau$. On fixe ω.

$$\begin{aligned}
\forall n,\ \tau(\omega) &= \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in O\} \\
&\leqslant \inf\{t \in \pi^n : X_t(\omega) \in O\} = \inf\{t > 0 : X_t^n(\omega) \in O\} \\
&\leqslant \inf\{t > 0 : X_t^n(\omega) \in O_n\} \quad \text{car} \quad O_n \subset O \text{ et } 0 \notin O.
\end{aligned}$$

Si $\tau(\omega) < +\infty$, alors pour tout $n \geqslant \tau(\omega)$, $\tau(\omega) \leqslant \tau^n(\omega)$ d'après ce qui précède. Donc en passant à la limite sur n, $\tilde{\tau}(\omega) \geqslant \tau(\omega)$.
Si $\tau(\omega) = +\infty$, alors pour tout n $\tau^n(\omega) = n$ d'après ce qui précède. En passant à la limite, $\tilde{\tau}(\omega) = \lim_n \tau^n(\omega) = +\infty$. Donc $\tilde{\tau}(\omega) = \tau(\omega)$.
Dans tous les cas, $\tilde{\tau}(\omega) \geqslant \tau(\omega)$.

Pour conclure, il reste à montrer que $\tilde{\tau} \leqslant \tau$. On raisonne par l'absurde et on suppose donc que $\tilde{\tau} > \tau$.
On fixe ω tel que $\tau^n(\omega) \to \tilde{\tau}(\omega)$ et $\tilde{\tau}(\omega) > \tau(\omega)$.
Par définition de $\tau(\omega)$, $X_.(\omega)$ entre pour la première fois dans O à l'instant $\tau(\omega)$. Comme X est continu et O ouvert, il existe donc un petit intervalle ouvert I aussi proche que l'on veut de $\tau(\omega)$ tel que $\forall t \in I$, $X_t(\omega) \in I$. Comme $\tilde{\tau}(\omega) > \tau(\omega)$, on peut imposer d'avoir $I \subset]\tau(\omega), \tilde{\tau}(\omega)[$ avec $I \neq \emptyset$. On écrit $I =]t_1, t_1 + \eta[$. On a alors, par construction, pour tout $t \in]t_1, t_1 + \eta[$, $X_t(\omega) \in O$.
$O = \bigcup_n O_n$ et les O_n sont des ouverts. Donc, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\{X_t(\omega), t \in]t_1, t_1 + \eta[\} \cap O_n \neq \emptyset$.
De plus, $|\pi^n| \to 0$ donc il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, il existe $t_n \in \pi^n \cap]t_1, t_1 + \eta_1[$. Alors, pour tout $n \geqslant n_1$, $\tau^n(\omega) \leqslant t_n < t_1 + \eta < \tilde{\tau}(\omega)$. Ceci contredit le fait que $(\tau^n(\omega))_n$ décroît vers $\tilde{\tau}(\omega)$.
Donc $\tilde{\tau}(\omega) = \tau(\omega)$. Aussi, $\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau$. □

Si on simule un processus en générant ses discrétisés avec un pas de temps très petit et si on approche un domaine en considérant ses approximations suivant une grille très fine, le temps d'entrée du processus approché dans le domaine approché est alors peu différent du temps d'entrée du processus en temps continu dans le domaine initial.

On obtient en particulier le résultat suivant pour le mouvement brownien en dimension 1.

Proposition 1.2.3 *Soit W un mouvement brownien et (W^n) une suite de discrétisés selon une suite croissante de subdivisions (π^n) de pas tendant vers 0. Soit $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par W et $\mathcal{F}^n$ celles engendrées par les W^n. Soit (a^n) et a des réels tels que (a^n) décroît vers a. On considère les temps d'arrêt suivants :*

$$\tau = \inf\{t > 0 : W_t > a\} \quad et \quad \tau^n = \inf\{t \in]0, n] : W_t^n > a^n\} \wedge n.$$

Alors $\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau$.

La proposition 1.2.3 permettra d'illustrer le résultat de la partie 3.3.4 sur la convergence de la solution d'une EDSR dirigée par les discrétisés (W^n) d'un mouvement brownien W et d'horizon aléatoire (τ^n) vers celle d'une EDSR dirigée par un mouvement brownien W et d'horizon aléatoire τ. À cette occasion, on montrera d'ailleurs que, dans le cas du mouvement brownien W, $\inf\{t > 0 : W_t > a\} = \inf\{t > 0 : W_t \geqslant a\}$ *p.s.*

Remarque 1.2.4 Le résultat de la proposition 1.2.2 n'est plus nécessairement vrai si on prend des fermés. En effet, si on considère le processus déterministe x tel que $x \equiv a$, alors $x^n \equiv a$. D'autre part, $\tau = \inf\{t : x_t \geqslant a\} = 0$ et, pour toute suite (a^n) décroissant vers a vérifiant $\forall n, a^n \neq a$, $\tau^n = \inf\{t : x_t^n \geqslant a^n\} = n$. Aussi on n'a pas convergence de (τ^n) vers τ. En général, on peut juste affirmer que (τ^n) converge vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt supérieur ou égal à τ.

1.2.2 Résultats dans le cas de convergence de filtrations

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.5 *On suppose que $\mathcal{F}$ est continue à droite et que $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt telle que $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$. On suppose également que τ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Alors τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.*

Démonstration
$\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ donc $\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant .\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant .\}}$ pour J_1.
On fixe t tel que $\mathbb{P}[\tau = t] = 0$. Alors,

$$\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}.$$

La suite $(\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}})_n$ étant équiintégrable, on a :

$$\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}.$$

τ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc $\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Alors, comme $\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} \xrightarrow{L^1} \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$, $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$ et $\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, d'après la remarque 2 dans Coquet, Mémin et Słomiński [16], on a :

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} | \mathcal{F}^n_.] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}} | \mathcal{F}_.] \quad \text{pour } J_1.$$

Montrons que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_t] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_t]$.
Soit $\eta > 0$ et $\varepsilon > 0$.
$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_.]$ est un processus continu à droite en probabilité. Donc il existe $s \in]t, T]$, point de continuité en probabilité de $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_.]$, tel que

$$\mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_t]| \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3.$$

Comme s est un point de continuité en probabilité de $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_.]$, on a $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_s] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_s]$. Ainsi, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_s] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_s]| \geqslant \eta/3] \leqslant \varepsilon/3.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_t] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_s] \geqslant \eta/3] = 0$$

car $\{\tau^n \leqslant t\} \in \mathcal{F}^n_t$ car $(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt et $\{\tau^n \leqslant t\} \in \mathcal{F}^n_s$ car $s \geqslant t$.
Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_t] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_t]| \geqslant \eta] \\
&\quad \leqslant \quad \mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_t] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_s] \geqslant \eta/3] \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_s] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_s]| \geqslant \eta/3] \\
&\qquad\qquad\quad + \mathbb{P}[|\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_t]| \geqslant \eta/3] \\
&\quad \leqslant \quad \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_t] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_t].$$

Or, $(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt. Donc, $\forall n$, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}|\mathcal{F}^n_t] = \mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}}$. De plus, $\mathbf{1}_{\{\tau^n \leqslant t\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$. Par unicité de la limite, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}|\mathcal{F}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant t\}}$ *p.s.* Donc, pour tout t tel que $\mathbb{P}[\tau = t] = 0$, $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

On montre ensuite que pour tout t, $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ en utilisant la continuité à droite de $\mathcal{F}$ comme dans la preuve de la proposition 1.2.1.

Donc τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. □

Remarque 1.2.6 Une hypothèse d'inclusion des tribus terminales $\mathcal{F}^n_T \subset \mathcal{F}_T, \forall n$ suffit à montrer la $\mathcal{F}_T$-mesurabilité de la limite. En effet, dans ce cas, les τ^n sont $\mathcal{F}^n_T$-mesurables donc $\mathcal{F}_T$-mesurables grâce à l'inclusion des tribus. Par conséquent, leur limite τ est aussi $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Remarque 1.2.7 Même sous une hypothèse de convergence de filtrations $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$, la limite d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt n'est pas forcément $\mathcal{F}_T$-mesurable. En effet, si on prend $\mathcal{F}$ la filtration triviale, la condition $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$ est toujours réalisée. Cependant, la limite d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt n'a aucune raison d'être une constante et donc d'être $\mathcal{F}_T$-mesurable.

La proposition 1.2.5 permettra, dans la partie 2.4, de montrer la convergence des temps d'arrêt optimaux du modèle de Cox-Ross-Rubinstein vers ceux du modèle de Black-Scholes.

1.2.3 Approximation d'un temps d'arrêt donné

On se place dans la situation suivante. Soit X et $(X^n)_n$ des processus càdlàg tels que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. On note $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par X et $(\mathcal{F}^n)$ celles engendrées par les (X^n).

On va montrer que l'on peut approcher un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ par une sous-suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt. Pour ce faire, on va raisonner par approximations successives. Dans le lemme 1.2.8, on verra comment approcher un temps d'arrêt τ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. L'argument principal sera un argument de convergence de tribus. Ensuite, on généralisera au cas d'un temps d'arrêt borné. Enfin, on donnera un résultat pour un temps d'arrêt τ quelconque.

Lemme 1.2.8 *Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt prenant un nombre fini de valeurs notées $\{t_i\}_{i\in I}$, toutes telles que $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$. Pour tout i, on pose $A_i = \{\tau = t_i\}$. On a $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$. On définit τ^n en posant $\tau^n(\omega) = \min\{t_i : i \in \{j : \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_j}|\mathcal{F}^n_{t_j}](\omega) > 1/2\}\}$ pour tout ω. Alors (τ^n) est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt qui converge en probabilité vers τ.*

Démonstration
$(\tau^n)_n$ est, par construction, une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt.

Montrons que $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$.
On a $\mathcal{F}^n_{t_i} \to \mathcal{F}_{t_i}, \forall i$ d'après la proposition 1.1.46.

Soit $(\tau^{\varphi(n)})_n$ une sous-suite de $(\tau^n)_n$. Pour tout i, la convergence de tribus de $(\mathcal{F}^n_{t_i})_n$ vers $\mathcal{F}_{t_i}$ entraîne $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}^{\varphi(n)}_{t_i}] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{1}_{A_i}$. En procédant par extractions successives pour $i \in I$ fini, il existe ψ tel que pour tout i, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{F}^{\varphi\circ\psi(n)}_{t_i}] \xrightarrow{p.s.} \mathbf{1}_{A_i}$. Pour n assez grand, on a donc $\tau^{\varphi\circ\psi(n)} = \tau$ *p.s.* Donc $\tau^{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow{p.s.} \tau$. Par suite, $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$. □

Lemme 1.2.9 *Soit L tel que $\mathbb{P}[\Delta X_L \neq 0] = 0$. Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt borné par L. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que la suite $(\tau^{\varphi(n)})$ de $(\mathcal{F}^{\varphi(n)})$-temps d'arrêt converge en probabilité vers τ.*

Démonstration
Soit $(\pi^k = \{t^k_j, j = 0, \ldots, K_j\})_k$ une suite de subdivisions de $[0, L]$ constituée uniquement de points de continuité de X et dont le pas tend vers 0 quand k tend vers l'infini. On considère les $\mathcal{F}$-temps d'arrêt τ^k définis par

$$\tau^k = \sum_{j=0}^{K_j-1} t^k_{j+1}\mathbf{1}_{\{t^k_j<\tau\leqslant t^k_{j+1}\}}.$$

$(\tau^k)_k$ est une suite de $(\mathcal{F}^k)$-temps d'arrêt décroissant vers τ d'après la preuve du lemme 1.1.55.
D'autre part, pour chaque k, τ^k est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt ne prenant qu'un nombre fini de valeurs donc, d'après le lemme 1.2.8, il existe une suite $(\tau^{n,k})_n$ de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt telle que $\tau^{n,k} \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau^k$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. On a :

$$\mathbb{P}[|\tau^{n,k} - \tau| \geqslant \eta] \leqslant \mathbb{P}[|\tau^{n,k} - \tau^k| \geqslant \eta/2] + \mathbb{P}[|\tau^k - \tau| \geqslant \eta/2].$$

$\tau^k \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ donc il existe k_0 tel que pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\mathbb{P}[|\tau^k - \tau| \geqslant \eta/2] \leqslant \varepsilon/2.$$

D'autre part, pour chaque k, $\tau^{n,k} \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau^k$. De proche en proche, on construit alors $(\varphi(k))_{k\geqslant k_0}$ telle que pour tout k, $\varphi(k) \geqslant \varphi(k-1)$ et

$$\mathbb{P}[|\tau^{\varphi(k),k} - \tau^k| \geqslant \eta/2] \leqslant \varepsilon/2.$$

On a ainsi construit une suite $(\tau^{\varphi(k),k})_k$ de $(\mathcal{F}^{\varphi(k)})$-temps d'arrêt qui converge en probabilité vers le temps d'arrêt initial τ. □

Proposition 1.2.10 *Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que la suite $(\tau^{\varphi(n)})$ de $(\mathcal{F}^{\varphi(n)})$-temps d'arrêt converge en probabilité vers τ.*

Démonstration
On approche τ par la suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt bornés $(\tau^N) = (\tau \wedge N)_N$. Pour chacun des τ^N, on fait alors la construction du lemme 1.2.9. Par un argument d'extraction, on obtient alors le résultat cherché. □

Cette construction sera utilisée dans le lemme 2.2.3 de la section 2.2.1 sur la convergence des réduites.

1.3 Approximation du mouvement brownien par des marches aléatoires

Dans cette section, afin d'alléger les notations, on prendra $T = 1$.

Partant d'un mouvement brownien, on veut construire une suite de marches aléatoires symétriques qui converge presque sûrement vers ce mouvement brownien et telle que les marches aléatoires soient toutes mesurables par rapport à la tribu brownienne à l'instant terminal. L'expression « suite de marches aléatoires » désignera ici une suite de processus (X^n) de la forme $X^n_. = a_n \sum_{i=1}^{[n.]} Y_i^n$ où les Y_i^n sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $a_n \in \mathbb{R}$.

Kac dans [30] et Marchal dans [40] par exemple ont construit des approximations du mouvement brownien par des marches aléatoires. Dans leurs résultats, les marches construites ne sont pas forcément mesurables par rapport à la tribus brownienne à l'instant terminal. Or cette contrainte est ici fondamentale en vue d'une application dans la section 2.4.

On verra tout d'abord une construction naturelle basée sur les accroissements du brownien et on montrera que la suite de marches aléatoires associée ne peut converger en probabilité vers aucun mouvement brownien.

On donnera ensuite les grandes lignes de la méthode utilisée par Itô et McKean dans [23] pour résoudre le problème étudié.

On terminera en exposant une autre méthode basée sur la régularité des trajectoires d'un processus. La marche aléatoire construite ne sera pas symétrique et ne répond donc pas complètement au problème posé. Cependant, cette construction est valable pour toute une famille de processus, la convergence obtenue est presque sûre et on aura un majorant de la vitesse de convergence.

On illustrera ensuite les différentes méthodes par des simulations.

1.3.1 Une construction naturelle

Soit B un mouvement brownien standard sur $[0,1]$ et $\mathcal{F}^B$ la filtration engendrée par ce processus. On considère la suite de marches aléatoires définie de la façon suivante.

Pour tout n, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on pose

$$X_k^n = \operatorname{sgn}\left(B_{\frac{k+1}{n}} - B_{\frac{k}{n}}\right)$$

où sgn est la fonction signe. Puis, on définit la suite de processus $(B^n)_n$ par :

$$B_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^n$$

pour tout n, pour tout $t \in [0,1]$.

Comme B est un processus à accroissements indépendants, les X_k^n sont des variables de Bernoulli symétriques indépendantes. Alors, d'après le théorème de Donsker, (B^n) converge en loi vers un mouvement brownien.

On va montrer qu'on ne peut pas trouver de mouvement brownien tel que la suite (B^n) converge en probabilité vers ce mouvement brownien. On raisonne par l'absurde.

Supposons donc qu'il existe un mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que $B^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tilde{B}$.

Montrons que $\tilde{B}$ est une $\mathcal{F}^B$-martingale, ce qui permettra de donner une autre écriture de $\tilde{B}$ grâce au théorème de représentation des martingales browniennes.

Tous les processus B^n sont $\mathcal{F}_1^B$-mesurables (ils sont même adaptés par rapport à la filtration $\mathcal{F}^B$), donc $\tilde{B}$ est $\mathcal{F}_1^B$-mesurable. On travaille donc dans l'espace probabilisé

$(\Omega, \mathcal{F}_1^B, \mathbb{P})$.
La convergence en probabilité entraîne la convergence stable (cf Jacod et Mémin [25] par exemple) donc (B^n) converge stablement vers $\tilde{B}$. Rappelons la définition de la convergence stable introduite par Renyi dans [53] :

Définition 1.3.1 *La suite de variables aléatoires (X_n) converge stablement vers X si pour tout $A \in \mathcal{F}_1^B$, pour toute fonction f continue bornée, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A f(X_n)] \to \mathbb{E}[\mathbf{1}_A f(X)]$.*

Par définition de la convergence stable, on a alors :

$$\forall t > s, \forall F \in \mathcal{F}_s^B, \int \mathbf{1}_F(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)d\mathbb{P} = \lim_{n\to+\infty} \int \mathbf{1}_F(B_t^n - B_s^n)d\mathbb{P}.$$

On fixe $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
Soit $F \in \sigma(B_{1/n_0}, \dots, B_{k/n_0})$ avec $\frac{k}{n_0} \leqslant s$. Alors,

$$\forall n \geqslant n_0, \int \mathbf{1}_F(B_t^n - B_s^n)d\mathbb{P} = 0$$

car, comme B est un processus à accroissements indépendants, $B_t^n - B_s^n$ est indépendant de B_u pour tout $u \leqslant \frac{[ns]+1}{n}$ et $\frac{k}{n_0} \leqslant s \leqslant \frac{[ns]+1}{n}$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on a :

$$\forall n_0, \forall F \in \sigma(B_{1/n_0}, \dots, B_{k/n_0}) \text{ avec } \frac{k}{n_0} \leqslant s, \int \mathbf{1}_F(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)d\mathbb{P} = 0.$$

De plus, $\mathcal{F}_s^B = \bigvee_n \sigma(B_{1/n}, \dots, B_{k/n} \ : \ \frac{k}{n} \leqslant s)$.
Soit $F \in \mathcal{F}_s^B$. Il existe une suite (F^n) d'éléments de $(\sigma(B_{1/n}, \dots, B_{k/n} \ : \ \frac{k}{n} \leqslant s))_n$ telle que $\mathbf{1}_{F^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{1}_F$. Pour tout n, on a : $\int \mathbf{1}_{F^n}(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)d\mathbb{P} = 0$. A la limite, il vient :

$$\forall t > s, \forall F \in \mathcal{F}_s^B, \int \mathbf{1}_F(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s)d\mathbb{P} = 0.$$

Par conséquent, $\tilde{B}$ est une $\mathcal{F}^B$-martingale.

D'après le théorème de représentation des martingales browniennes, il existe (b_s) tel que pour tout t,

$$\tilde{B}_t = \int_0^t b_s dB_s.$$

Pour tout t, on a : $< \tilde{B} >_t = \int_0^t b_s^2 ds$. De plus, $B^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tilde{B}$ et la suite (B^n) vérifie la condition UT étudiée par Jakubowski, Mémin et Pagès dans [29] :

Définition 1.3.2 *On dit que la suite (X^n) vérifie la condition UT (pour Uniforme Tension) si la famille des lois $\{P^n_{H^n.X^n_t}, \ n \in \mathbb{N}, \ H^n \in \mathcal{H}_t^n\}$ est tendue, où $\mathcal{H}_t^n$ est l'ensemble des processus prévisibles élémentaires de la forme $H_s^n = Y_0^n + \sum_{i=0}^k Y_{t_i}^n \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$ avec $Y_{t_i}^n$ $\mathcal{F}_{t_i}^n$-mesurable à valeurs réelles avec $|Y_{t_i}^n| \leqslant 1$ et $\{0 = t_0 < \ldots < t_k = t\}$ partition finie de $[0,t]$.*

Alors, $[B^n] \xrightarrow{\mathbb{P}} [\tilde{B}]$, d'après le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 *On suppose que* (X^n) *est une suite de semimartingales, que* $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ *et que* (X^n) *satisfait la condition* (UT)*. Alors* $(X^n, [X^n]) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, [X])$*.*

Démonstration
On raisonne comme dans la preuve du corollaire 2.8 dans Jakubowski, Mémin, Pagès [29] qui donne le résultat avec une hypothèse de convergence en loi. Ce corollaire découle du théorème 2.6 dans [29] qui est réécrit avec des convergences en probabilité dans le théorème 6.22 dans Jacod et Shiryaev [27]. □

Mais, $\forall t$, $[B^n]_t = \frac{[nt]}{n}$. De plus, comme $\tilde{B}$ est un processus continu, $[\tilde{B}] =< \tilde{B} >$. Alors, en passant à la limite, on a :

$$\forall t, \int_0^t b_s^2 ds = t \quad p.s. \tag{1.12}$$

Déterminons maintenant $\int_0^t b_s ds$. Comme $(\tilde{B}, B)$ est un mouvement brownien 2-dimensionnel, $\mathrm{Cov}(\tilde{B}_t, B_t) =< \tilde{B}, B >_t= \int_0^t b_s ds$, pour tout t.

Soit $(\bar{B}^n)_n$ une suite de discrétisés de B selon une suite de subdivisions de pas tendant vers 0. On a la convergence $\bar{B}^n \xrightarrow{p.s.} B$.

La suite $((B^n, \bar{B}^n))_n$ est tendue donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(B^n, \bar{B}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B', B'')$ où (B', B'') est un mouvement brownien 2-dimensionnel.

De plus, comme $\bar{B}^n \xrightarrow{p.s.} B$, $(B^n, \bar{B}^n)$ et (B^n, B) ont la même limite en loi. Donc, $(B^n, B) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B', B'')$.

D'autre part, $B^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tilde{B}$ et $\bar{B}^n \xrightarrow{p.s.} B$. Donc, $(B^n, \bar{B}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\tilde{B}, B)$. Mais, par construction, $(B^n, \bar{B}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B', B'')$. Aussi, $(\tilde{B}, B) \sim (B', B'')$. Donc, pour tout t, $\mathrm{Cov}(\tilde{B}_t, B_t) = \mathrm{Cov}(B'_t, B''_t)$.

Déterminons la matrice de covariance de (B', B'').
Par propriété de la convergence en loi, pour tout $s, t \in [0, 1]$,

$$\mathrm{Cov}(B_t^n, B_s) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{Cov}(B'_t, B''_s).$$

On va donc calculer $\mathrm{Cov}(B_t^n, B_s)$, pour tout $s, t \in [0, 1]$. On a

$$\mathrm{Cov}(B_t^n, B_s) = \mathbb{E}[B_t^n B_s] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} \mathbb{E}[X_i^n B_s].$$

Supposons dans un premier temps que $s > t$.
Pour tout i, $\mathbb{E}[X_i^n B_s] = \mathbb{E}[\mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}) B_s]$. Pour n assez grand, $s - t > 1/n$, donc

pour tout $i \in \{1, \dots, [nt]\}$, $s > \frac{i+1}{n}$. Alors, pour n assez grand, pour tout i,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[X_i^n B_s] \\
&= \mathbb{E}[(B_s - B_{\frac{i+1}{n}})\mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})] + \mathbb{E}[B_{\frac{i+1}{n}}\mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})] \\
&= 0 + \mathbb{E}[(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})\mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})] + \mathbb{E}[B_{\frac{i}{n}}\mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})] \\
&\quad \text{car } B_s - B_{\frac{i+1}{n}} \text{ et } \mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}) \text{ sont des processus centrés indépendants} \\
&= \mathbb{E}[|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}|] \\
&\quad \text{car } B_{\frac{i}{n}} \text{ et } \mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}) \text{ sont des processus centrés indépendants} \\
&= \mathbb{E}[|B_{1/n}|] \quad \text{car} \quad B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}} \sim B_{1/n} \\
&= \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour n assez grand, $\mathrm{Cov}(B_t^n, B_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{[nt]}{n}$. En passant à la limite, il vient :

$$\forall s > t,\ \mathrm{Cov}(B'_t, B''_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ t.$$

Considérons maintenant le cas où $s \leqslant t$.
D'après les calculs précédents, pour tout $i < [ns]$, $\mathbb{E}[X_i^n B_s] = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}$.
D'autre part, pour tout $i > [ns]$, $\mathbb{E}[X_i^n B_s] = \mathbb{E}\left[\mathrm{sgn}(B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}})B_s\right] = 0$ en utilisant l'indépendance des accroissements de B.
Alors,

$$\mathrm{Cov}(B_t^n, B_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{[ns]-1}{n} + \frac{\mathbb{E}[X_{[ns]}^n B_s]}{\sqrt{n}}.$$

En passant à la limite, il vient

$$\forall s \leqslant t,\ \mathrm{Cov}(B'_t, B''_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ s.$$

Ainsi,

$$\forall s, t \in [0,1],\ \mathrm{Cov}(B'_t, B''_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ s \wedge t.$$

Finalement, on a donc :

$$\forall t, \int_0^t b_s ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ t. \tag{1.13}$$

Les équations (1.12) et (1.13) entraînent respectivement $b_t^2 = 1$ et $b_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ pour tout t. On a une contradiction. Il n'existe donc pas de mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que $B^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tilde{B}$.

1.3.2 La construction de Knight

La construction qui fait l'objet de cette section est expliquée par Itô et McKean dans [23] et utilise les résultats de Knight dans [34]. On va donner les grandes lignes de la méthode utilisée.
Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien tel que $B_0 = 0$ et $\mathcal{F}$ sa filtration propre.
On fixe ω. On va raisonner trajectoire par trajectoire pour construire la suite $(B^n)_n$ de marches aléatoires. Pour alléger les notations, ω ne sera pas écrit dans la suite.
Tout d'abord, on introduit les temps de sortie suivants :

$$e_0^n = 0 \quad \forall l \geqslant 1,\ e_l^n = \inf\left\{t \in [e_{l-1}^n, 1] : |B_t - B_{e_{l-1}^n}| = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = 1$.
Donnons immédiatement un lemme concernant les moments des e_k^n :

Lemme 1.3.4 *On a* $\mathbb{E}[e_1^n] = \dfrac{1}{n}$ *et* $\mathbb{E}\left[\left|e_1^n - \dfrac{1}{n}\right|^4\right] = \dfrac{412}{105} \times \dfrac{1}{n^4}$.

Démonstration
Par définition, $e_1^n = \min\left\{t : |B_t| = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = m_{1/\sqrt{n}} \wedge m_{-1/\sqrt{n}}$ avec $m_a = \inf\{t : W_t = a\}$.
Or, on sait que pour tout α, $\mathbb{E}[e^{-\alpha m_{1/\sqrt{n}} \wedge m_{-1/\sqrt{n}}}] = \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{2\alpha n}\right)}$.
En dérivant par rapport à α et en prenant la valeur en 0, on obtient immédiatement : $\mathbb{E}[e_1^n] = \frac{1}{n}$. En calculant les moments successifs, on trouve la valeur de $\mathbb{E}\left[\left|e_1^n - \frac{1}{n}\right|^4\right]$. □

On considère ensuite

$$S_l^n = \sqrt{n} B_{e_l^n}.$$

Pour finir, dans [23], Itô et McKean construisent la suite de processus (B^n) en reliant de façon affine les points $\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}} S_k^n\right)$ pour $k \leqslant n$.
Vu la notion de marche aléatoire considérée ici, on construit la suite de processus B^n constants par morceaux tels que $\forall t \in [k/n, (k+1)/n[$, $B_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k^n$.
$B_t^n = \sqrt{\dfrac{1}{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{[nt]} Y_i^n$ avec $Y_i^n = S_i^n - S_{i-1}^n$. Comme B est un processus à accroissements indépendants, $(B^n)_n$ est une suite de marches aléatoires symétriques au sens défini plus haut.

Lemme 1.3.5 $\mathbb{P}\left[\lim\limits_{n\uparrow+\infty} \sup\limits_{t\in[0,1]} |B_t^n - B_t| = 0\right] = 1.$

Démonstration
On raisonne comme Knight dans [34]. On travaille à ω fixé. Soit $t \in [0,1]$. Il existe un unique k tel que $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$. Alors,

$$\begin{aligned} |B_t^n - B_t| &= |B_{k/n}^n - B_t| \\ &\leqslant |B_{k/n}^n - B_{k/n}| + |B_{k/n} - B_t| \\ &\leqslant |B_{e_k^n} - B_{k/n}| + |B_{k/n} - B_t|. \end{aligned}$$

D'autre part, notant $\delta_k^n = \left|e_k^n - \frac{k}{n}\right|$, si on montre que $\max_{k\leqslant n}\delta_k^n \to 0$ quand n tend vers l'infini, par propriété du module de continuité du mouvement brownien (cf théorème 2.9.25 dans Jacod et Shiryaev [27]),

$$\forall k,\ \mathbb{P}\left[\limsup_n \frac{\max_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant 1\\ t-s\leqslant \delta_k^n}}|B_t - B_s|}{\sqrt{2\delta_k^n\log(1/\delta_k^n)}} \leqslant 1\right] = 1$$

et

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n \frac{\max_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant 1\\ t-s\leqslant 1/n}}|B_t - B_s|}{\sqrt{2\frac{\log(n)}{n}}} \leqslant 1\right] = 1$$

Donc, pour presque tout ω, il existe $C_\omega \geqslant 1$ tel que

$$\forall n,\ \forall k,\ \frac{\max\limits_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant 1\\ t-s\leqslant \delta_k^n}}|B_t(\omega) - B_s(\omega)|}{\sqrt{2\delta_k^n(\omega)\log(1/\delta_k^n(\omega))}} \leqslant C_\omega \quad \text{et} \quad \forall n,\ \frac{\max\limits_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant 1\\ t-s\leqslant 1/n}}|B_t(\omega) - B_s(\omega)|}{\sqrt{2\frac{\log(n)}{n}}} \leqslant C_\omega.$$

On a alors

$$|B_{e_k^n} - B_{k/n}| + |B_{k/n} - B_t| \leqslant C \times \sqrt{\delta_k^n \log(1/\delta_k^n)} + C \times \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\ \ p.s.$$

où C est une constante dépendant uniquement de ω. Finalement, on a donc

$$\sup_{t\in[0,1]}|B_t^n - B_t| \leqslant C\left(\max_{k\leqslant n}\sqrt{\delta_k^n\log(1/\delta_k^n)} + \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\right). \tag{1.14}$$

Pour conclure, le raisonnement est le suivant.
On considère $p_n = \mathbb{P}\left[\max_{k\leqslant n}\delta_k^n > \frac{1}{n^{1/5}}\right]$. Si on montre que $\sum p_n < +\infty$, alors d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left[\limsup_n\left\{\max_{k\leqslant n}\delta_k^n > \frac{1}{n^{1/5}}\right\}\right] = 0,$$

donc pour presque tout ω, il existe n_ω tel que $\forall n \geqslant n_\omega$, $\max\limits_{k\leqslant n}\delta_k^n \leqslant \dfrac{1}{n^{1/5}} \leqslant \dfrac{C}{n^{1/5}}$. On a alors la convergence cherchée.
Reste donc à montrer que $\sum p_n < +\infty$.

Tout d'abord, on remarque que $\left(e_k^n - \frac{k}{n}\right)_{k\geqslant 0}$ est une martingale pour sa filtration propre $\mathcal{G}$. En effet, pour tout k, $\mathcal{G}_k = \sigma(e_j^n - \frac{j}{n}, j \leqslant k)$. De plus,

$$\mathbb{E}\left[e_k^n - \frac{k}{n}\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right] = \mathbb{E}\left[(e_k^n - e_{k-1}^n) - \frac{1}{n}\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right] + \mathbb{E}\left[e_{k-1}^n - \frac{k-1}{n}\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right].$$

Mais, par propriété de Markov du mouvement brownien, pour tout $j \leqslant k-1$, $e_k^n - e_{k-1}^n$ est indépendante de e_j^n et de même loi que e_1^n. Donc,

$$\mathbb{E}\left[(e_k^n - e_{k-1}^n) - \frac{1}{n}\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right] = \mathbb{E}\left[e_k^n - e_{k-1}^n\right] - \frac{1}{n} = \mathbb{E}[e_1^n] - \frac{1}{n} = 0$$

d'après le lemme 1.3.4.
D'autre part, $e^n_{k-1} - \frac{k-1}{n}$ est $\mathcal{G}_{k-1}$-mesurable par définition de $\mathcal{G}$.
Donc, $\mathbb{E}\left[e^n_k - \frac{k}{n}|\mathcal{G}_{k-1}\right] = e^n_{k-1} - \frac{k-1}{n}$. Aussi, $\left(e^n_k - \frac{k}{n}\right)_{k\geqslant 0}$ est une martingale pour sa filtration propre.

Comme $x \mapsto x^4$ est convexe, $\left(\left(e^n_k - \frac{k}{n}\right)^4\right)_{k\geqslant 0}$ est une sous-martingale. Alors, en utilisant les inégalités de Doob et Markov, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{k\leqslant n}\left|e^n_k - \frac{k}{n}\right| > n^{-1/5}\right] &= \mathbb{P}\left[\max_{k\leqslant n}\left|e^n_k - \frac{k}{n}\right|^4 > n^{-4/5}\right] \\
&\leqslant n^{4/5}\mathbb{E}\left[\max_{k\leqslant n}\left|e^n_k - \frac{k}{n}\right|^4\right] \\
&\leqslant n^{4/5}\mathbb{E}\left[|e^n_n - 1|^4\right].
\end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{E}\left[|e^n_n - 1|^4\right] \leqslant 4\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\left|e^n_k - e^n_{k-1} - \frac{1}{n}\right|^4\right]$ et $e^n_k - e^n_{k-1} - \frac{1}{n}$ a même loi que $e^n_1 - \frac{1}{n}$ pour tout k. Donc,

$$p_n = \mathbb{P}\left[\max_{k\leqslant n}\left|e^n_k - \frac{k}{n}\right| > n^{-1/5}\right] \leqslant n^{4/5} \times 4l\mathbb{E}\left[|e^n_1 - 1|^4\right] \leqslant \frac{1648}{105}n^{-11/5}$$

d'après le lemme 1.3.4. Aussi, $\sum p_n < +\infty$ et le lemme est prouvé. □

Enfin, par construction, pour tout n, B^n est $\mathcal{F}_1$-mesurable.
On a donc le résultat suivant :

Proposition 1.3.6 *Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien tel que $B_0 = 0$ et $\mathcal{F}$ sa filtration propre. Alors il existe une suite $(B^n)_n$ de marches aléatoires symétriques qui converge presque sûrement vers B et telle que, pour tout n, B^n soit $\mathcal{F}_1$-mesurable.*

Ce résultat sera utilisé pour prouver la convergence des temps d'arrêt optimaux des modèles de Cox-Ross-Rubinstein vers ceux du modèle de Black-Scholes dans la partie 2.4.

Remarque 1.3.7 Dans cette méthode, on choisit une grille régulière, de pas $1/n$, au niveau des abscisses. On peut tout aussi bien considérer une grille fonction des temps d'arrêt en considérant les variables X^n constantes par morceaux telles que, pour tout k, $X^n_{e^n_k} = B^n_{e^n_k}$. La convergence reste inchangée avec cette construction.

1.3.3 Une méthode basée sur le module de continuité

Dans cette section, nous décrivons une méthode basée sur une propriété du module de continuité valable pour toute une famille de processus et pas seulement pour le mouvement brownien. En revanche, cette méthode ne permet pas d'approcher le processus X par une marche aléatoire au sens strict du terme. En effet, bien qu'elles prennent les valeurs dans $\{-1, 1\}$, les variables (Y_n) construites ne sont a priori ni indépendantes ni identiquement distribuées.

Proposition 1.3.8 *Soit X un processus indexé par $[0,1]$ avec $X_0 = 0$ tel qu'il existe $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante continue à droite en 0 avec $\varphi(0) = 0$ vérifiant la propriété suivante : pour presque tout ω, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s, t \in [0,1]$,*

$$|t-s| \leqslant \delta \Rightarrow |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant \varphi(\delta). \tag{1.15}$$

On considère la suite $(Y_n)_n$ à valeurs dans $\{-1,1\}$ définie par

$$Y_1 = \operatorname{sgn}(X_{1/n}) \quad et \quad \forall i \geqslant 2, Y_i = \operatorname{sgn}\left(X_{i/n} - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{i-1} Y_j\right)$$

où sgn *est la fonction signe. On a alors la convergence suivante*

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{[n.]} Y_i \xrightarrow{p.s.} X.$$

pour la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration

On raisonne à ω fixé. Pour plus de clarté, ω ne sera pas écrit dans la suite.
La propriété de régularité des trajectoires de X et la croissance de φ entraînent en particulier que pour tout n, si $|t-s| \leqslant 1/n$, alors $|X_t - X_s| \leqslant \varphi(1/n)$.

Montrons par récurrence que pour tout k, $\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i - X_{k/n}\right| \leqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ *p.s.*
- $k = 1$: Si $X_{1/n} \geqslant 0$, alors $Y_1 = 1$. De plus, d'après (1.15), $X_{1/n} \in [0, \varphi(1/n)]$. Aussi, $|Y_1 - X_{1/n}| \leqslant \varphi(1/n)$ *p.s.* On raisonne de la même façon si $X_{1/n} \leqslant 0$.
- $k \to k+1$: Il existe un unique j tel que $X_{k/n} \in [j\varphi(1/n), (j+1)\varphi(1/n)[$. Alors $X_{(k+1)/n}$ est dans l'un des intervalles suivants :

$$[(j-1)\varphi(1/n), j\varphi(1/n)[, \;\; [j\varphi(1/n), (j+1)\varphi(1/n)[\;\; \text{ou} \;\; [(j+1)\varphi(1/n), (j+2)\varphi(1/n)[.$$

De plus, par hypothèse de récurrence, $\left|X_{k/n} - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i\right| \leqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc, comme $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i \in \left\{l\varphi\left(\frac{1}{n}\right), l \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i = \begin{cases} j\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \;\; \text{ou} \;\; (j+1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \;\; \text{si} \;\; X_{k/n} \in]j\varphi(1/n), (j+1)\varphi(1/n)[, \\ (j-1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \; j\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \;\; \text{ou} \;\; (j+1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \;\; \text{si} \;\; X_{k/n} = j\varphi(1/n). \end{cases}$$

On différencie ensuite les cas suivant l'intervalle auquel $X_{(k+1)/n}$ appartient.

1er cas : $X_{(k+1)/n} \in [(j-1)\varphi(1/n), j\varphi(1/n)[$.
Si $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i = j\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $(j+1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $Y_{k+1} = -1$.
Si $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i = (j-1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $Y_{k+1} = 1$.
Aussi, $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k+1} Y_i = (j-1)\varphi(1/n)$ ou $j\varphi(1/n)$. Donc,

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k+1} Y_i - X_{(k+1)/n}\right| \leqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

2e cas : $X_{(k+1)/n} \in [j\varphi(1/n), (j+1)\varphi(1/n)[$.
Si $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i = (j+1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $Y_{k+1} = -1$. Sinon, $Y_{k+1} = 1$.
Donc, $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k+1} Y_i = j\varphi(1/n)$ ou $(j+1)\varphi(1/n)$. On a alors l'inégalité cherchée.

3e cas : $X_{(k+1)/n} \in [(j+1)\varphi(1/n), (j+2)\varphi(1/n)[$. Alors, $Y_{k+1} = 1$.
Si $X_{k/n} = j\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $X_{(k+1)/n} = (j+1)\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$. Dans ce cas, $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k+1} Y_i = j\varphi(1/n)$, $(j+1)\varphi(1/n)$ ou $(j+2)\varphi(1/n)$.
Sinon, $\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k+1} Y_i = (j+1)\varphi(1/n)$ ou $(j+2)\varphi(1/n)$.
On a toujours l'inégalité cherchée.

Ainsi, par récurrence, pour tout k,

$$\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k} Y_i - X_{k/n}\right| \leqslant \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \; p.s. \tag{1.16}$$

Soit $t \in [0,1]$. Pour tout n, il existe un unique k_n tel que $t \in \left[\frac{k_n}{n}, \frac{k_n+1}{n}\right[$. Alors,

$$\begin{aligned}
\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{[nt]} Y_i - X_t\right| &= \left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k_n} Y_i - X_t\right| \\
&\leqslant \left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{k_n} Y_i - X_{k_n/n}\right| + \left|X_{k_n/n} - X_t\right| \\
&\leqslant 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{d'après (1.15) et (1.16).}
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{[nt]} Y_i - X_t\right| \leqslant 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a donc la convergence annoncée dans la proposition. □

Dans le cas du mouvement brownien, on a la propriété suivante des trajectoires :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{\substack{t-s\leqslant 1/n \\ 0\leqslant s<t\leqslant 1}} |W_t - W_s|}{\sqrt{(2\log(n))/n}} \leqslant 1 \; p.s.$$

On fixe ω vérifiant l'inégalité ci-dessus. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, pour tout s, t tels que $|s-t| \leqslant 1/n$,

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}.$$

On considère alors $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x\log(1/x)} \end{array}$.

φ prolongée par continuité en 0 par 0 vérifie les conditions de la proposition 1.3.8.

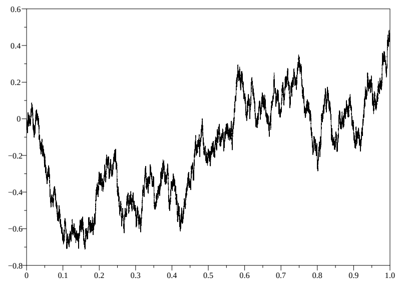
La vitesse de convergence est au moins polynomiale.

1.3.4 Simulations

Dans cette partie, toutes les simulations sont faites avec Scilab-2.7.

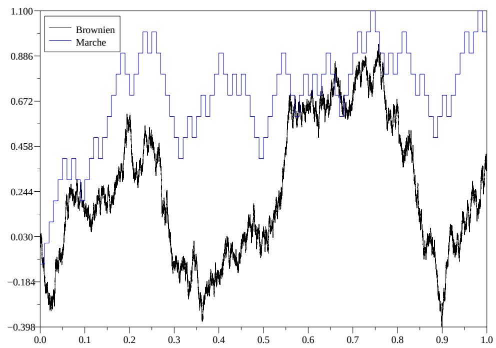
Simulation d'une trajectoire brownienne

Pour commencer, on simule une trajectoire d'un mouvement brownien B. Pour cela, on utilise le fait que pour tout n, $B_{k/n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k} X_i$ où les (X_i) sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour n assez grand, la trajectoire obtenue en reliant les points est proche d'une trajectoire brownienne. Voici un exemple de graphe obtenu pour $n = 100000$:



Méthode 1

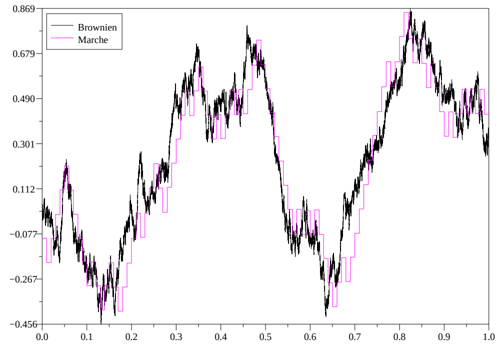
Pour la construction de la section 1.3.1, on va illustrer graphiquement le fait que la marche aléatoire ne converge pas presque sûrement vers le mouvement brownien initial. On remarque une certaine inertie qui fait que la marche aléatoire s'éloigne petit à petit de la trajectoire brownienne de départ. Voici un exemple de graphe obtenu pour $n = 100$:



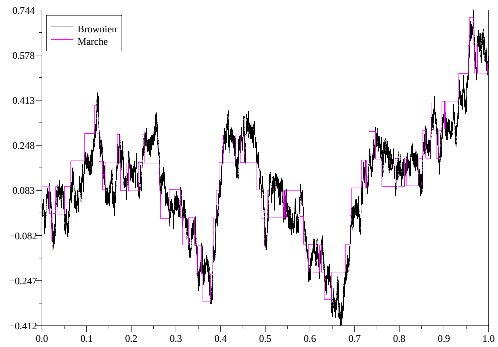
Méthode 2

Illustrons la méthode de Knight explicitée dans la section 1.3.2. Cette construction permet d'obtenir des marches aléatoires mesurables par rapport à la tribu terminale associée au mouvement brownien.

Voici un exemple de graphe obtenu pour $l = 100$:



L'inconvénient de cette méthode est qu'il est nécessaire d'avoir autant de temps d'arrêt e_k^n que de points dans l'ensemble $\{k/n, k \leqslant n\}$. Ce problème disparaît quand on tient compte de la remarque 1.3.7. On obtient alors un graphe du type suivant pour $l = 100$:

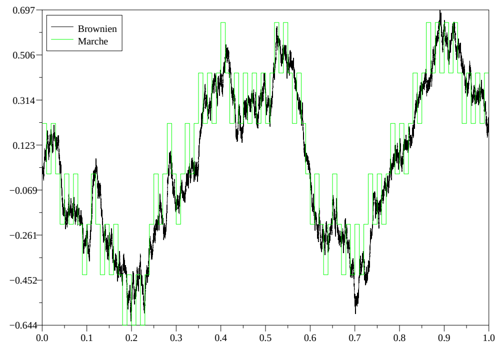


Méthode 3

Pour la construction de la section 1.3.3, toutes les hypothèses sont satisfaites par le mouvement brownien.

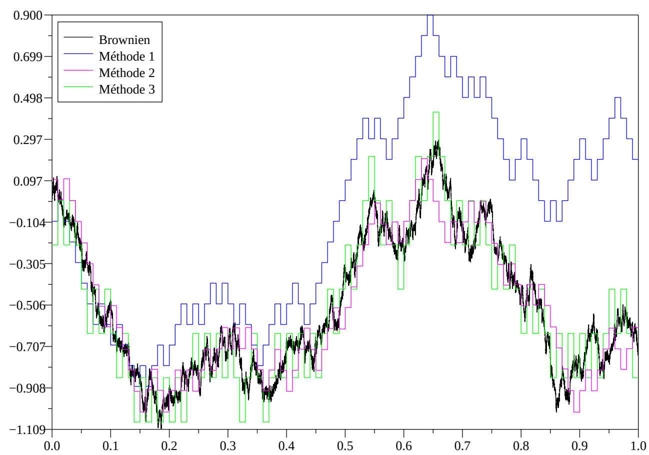
Ici, la convergence est cependant assez lente. En effet, avec les notations de la section 1.3.3, la vitesse de convergence est $\varphi(1/n)$. Dans le cas du mouvement brownien, elle est donc de l'ordre de $\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}$.

Voici un exemple de graphe obtenu pour $n = 100$:



Bilan

Pour mieux illustrer les différences, on superpose les trois méthodes sur le même graphe. On prend ici $l = 100$:



Chapitre 2

Convergence de réduites et de temps d'arrêt optimaux

2.1 Introduction

Soit X un processus indexé par $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}^X$ la filtration engendrée par X et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée ($\forall t, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}^X_{t^+}$). On note $\mathcal{T}_L$ l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt bornés par L.

Soit $\gamma : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On définit la réduite d'horizon L du processus X par :

$$\Gamma(L) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_L} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)].$$

Remarque 2.1.1 Comme le signalent D. Lamberton et G. Pagès dans [37], la valeur de $\Gamma(L)$ ne dépend que de la loi de X.

On s'intéresse d'abord au problème suivant qui sera l'objet de la partie 2.2. Soit $(X^n)_n$ une suite de processus qui converge en probabilité vers un processus limite X. Pour tout n, on note $\mathcal{F}^n$ la filtration engendrée par X^n et $\mathcal{T}^n_L$ l'ensemble des $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt bornés par L. On définit les réduites $\Gamma_n(L) = \sup \mathbb{E}[\gamma(\tau, X^n_\tau)]$ où le supremum est pris sur l'ensemble des $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt bornés par L. Le problème est alors de savoir si on a convergence de $(\Gamma_n(L))_n$ vers $\Gamma(L)$.

Dans son manuscrit non publié [2], Aldous montre que si X est quasi-continu à gauche et si on a convergence étendue (en loi) de $((X^n,\mathcal{F}^n))_n$ vers $(X,\mathcal{F})$, alors $(\Gamma_n(L))_n$ converge vers $\Gamma(L)$. Dans leur article [37], Lamberton et Pagès obtiennent le même résultat en supposant que (X^n) est une suite de processus quasi-continus à gauche, que le critère de tension d'Aldous est vérifié et que l'on a convergence étendue de $((X^n,\mathcal{F}^n))_n$ vers $(X,\mathcal{F})$.

Une autre approche de ce problème consiste à étudier les enveloppes de Snell associées aux processus. En effet, l'enveloppe de Snell Z d'un processus Y est le processus défini de la façon suivante :

$$Z_s = \sup_{\substack{\tau\geqslant s\\ \tau\in\mathcal{T}_L}} \mathbb{E}[Y_\tau|\mathcal{F}_s]$$

(cf El Karoui [33] par exemple). L'enveloppe de Snell Z se caractérise alors comme étant la plus petite surmartingale qui majore Y. On remarque que, par définition, l'enveloppe de Snell de Y en 0 est la réduite d'ordre L de Y.

Neveu dans [45] et El Karoui dans [33] donnent des propriétés des enveloppes de Snell pour des processus en temps discret et en temps continu respectivement. Ils indiquent aussi des critères d'existence de temps d'arrêt optimaux tout comme Shiryaev dans [56] et Mucci dans [43]. Pontier et Szpirglas dans [51] et [52] s'intéressent au problème d'arrêt optimal avec contratinte et donnent notamment des critères d'existence de temps d'arrêt randomisés ε-optimaux.

Des travaux existent également sur les problèmes d'approximation d'enveloppes de Snell. Dans [44], Mulinacci et Pratelli obtiennent un résultat de convergence des enveloppes de Snell pour la topologie de Meyer-Zheng.

Les réduites et temps d'arrêt optimaux interviennent dans l'étude de modèles financiers. Plusieurs travaux ont donc été faits en vue d'application en finance. On citera les articles de Lamberton [35], Amin et Khanna [4], Duffie et Protter [19] ainsi que Dupuis et Wang [20] où les différents auteurs s'intéressent entre autres à l'approximation de temps d'arrêt optimaux dans le cas d'options américaines.

Dans ce chapitre, on ne cherchera pas à montrer la convergence des enveloppes de Snell mais celle des réduites dans le même esprit que dans les preuves d'Aldous [2] et de Lamberton et Pagès [37].

Dans un premier temps, nous verrons dans la partie 2.2.1 que, sous des hypothèses très faibles, on obtient l'inégalité $\Gamma(L) \leqslant \liminf \Gamma_n(L)$.

Pour montrer que $(\Gamma_n(L))_n$ converge vers $\Gamma(L)$, il faut ensuite montrer que $\Gamma(L) \geqslant \limsup \Gamma_n(L)$. Cette inégalité est beaucoup plus difficile à obtenir et c'est là qu'intervient la convergence étendue dans les démonstrations déjà existantes.

Le point clé des démonstrations d'Aldous, de Lamberton et Pagès et de celles que nous allons voir ici est le suivant. On construit une suite (τ^n) de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt bornés par L. On veut ensuite extraire une sous-suite convergente de (τ^n) vers une variable aléatoire τ en sachant comparer $\mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)]$ et $\Gamma(L)$. Nous allons voir ici deux méthodes pour y parvenir.

Dans un premier temps, on agrandit l'espace des temps d'arrêt. On considère alors les temps d'arrêt randomisés et la topologie introduits par Baxter et Chacon dans l'article [6]. Baxter et Chacon montrent que l'espace des temps d'arrêt randomisés pour une filtration continue à droite muni de cette topologie est compact. On utilisera cette méthode dans la partie 2.2.2 dans le cas où on a inclusion des filtrations $(\mathcal{F}^n)$ dans $\mathcal{F}$. Le résultat obtenu dans ce cadre a des hypothèses beaucoup plus faciles à vérifier que les autres résultats de convergence de réduites qui comportent une hypothèse de convergence étendue dans [2] et [37] ou une hypothèse de convergence de filtrations dans ce mémoire.

Quand on n'a pas l'inclusion de filtrations précédente, on agrandit la filtration $\mathcal{F}$ associée au processus limite X. Cette approche est utilisée, de façon un peu différente, par D. Aldous dans son manuscrit [2] et par D. Lamberton et G. Pagès dans leur article [37]. Ici, dans la partie 2.2.3, on agrandit la filtration limite (au minimum) de façon à ce que la limite τ^* d'une suite extraite convergente de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt randomisés associés aux $(\tau^n)_n$ soit un temps d'arrêt randomisé pour cette nouvelle filtration et on utilise la convergence de filtrations (et pas la convergence étendue). Le résultat obtenu, situé dans la lignée de ceux d'Aldous et de Lamberton et Pagès, repose essentiellement sur des hypothèses de convergence en probabilité de processus et de filtrations qui sont plus faciles à manipuler que celle de convergence étendue d'Aldous. Ici, nous n'aurons jamais besoin du processus de prédiction qui a permis à Aldous de définir la convergence étendue. Le résultat obtenu permet ainsi de compléter les résultats de convergence de réduites en considérant un nouvel angle d'approche.

Le prolongement naturel de cette étude est de s'intéresser à la convergence des temps d'arrêt optimaux associés aux réduites, ce que nous verrons dans la partie 2.3. Plus précisément, un temps d'arrêt optimal associé à la réduite $\Gamma(L)$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt borné par L tel que le sup soit atteint. Dans le cas où on a convergence des valeurs optimales $(\Gamma_n(L))_n$ vers $\Gamma(L)$, on s'intéresse à la convergence de la suite $(\tau^n_{op})_n$ des temps d'arrêt optimaux associés. Là aussi, le problème est que généralement la limite en loi d'une suite de temps d'arrêt n'est pas la loi d'un temps d'arrêt (voir le contre-exemple de Baxter et Chacon dans [6] explicité dans la partie 1.2.1). On donnera des résultats de convergence de temps d'arrêt optimaux qui découlent du critère de la partie 1.2.2 prouvant, sous des hypothèses de convergence de filtrations et d'inclusion des tribus terminales, que la limite en probabilité d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$ temps d'arrêt est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Le principal apport de cette partie est de donner des critères pour que la limite soit un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt (et pas seulement un temps d'arrêt pour une filtration plus grande que $\mathcal{F}$).

Dans la partie 2.4, nous illustrerons tout ce travail par une application en finance. Nous nous baserons sur l'approximation du modèle de Black-Scholes par des modèles de Cox-Ross-Rubinstein. Nous retrouverons d'abord le fait (connu) que les réduites associées au modèle de Cox-Ross-Rubinstein convergent vers celles associées au modèle de Black-Scholes. Ensuite, nous verrons des conditions sous lesquelles les temps d'arrêt optimaux associés au modèle de Cox-Ross-Rubinstein convergent (en loi) vers ceux associés au modèle de Black-Scholes. Là encore, le point nouveau est de trouver des hypothèses sous lesquelles la limite d'une suite de temps d'arrêt associés aux modèles de Cox, Ross et Rubinstein est un temps d'arrêt pour la filtration associée au modèle de Black et Scholes (et pas pour une filtration plus grande).

2.2 Convergence des réduites

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit X un processus càdlàg et $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg. Soit $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à la filtration engendrée par X et $(\mathcal{F}^n)_n$ les filtrations engendrées par les processus $(X^n)_n$. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, que (X_n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2) et que :*
- ou bien pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$,
- ou bien $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$.

Alors $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(L)$.

La démontration se fait en deux étapes :
- étape 1 : on montre que $\Gamma(L) \leqslant \liminf \Gamma_n(L)$ dans la section 2.2.1,
- étape 2 : on montre que $\Gamma(L) \geqslant \limsup \Gamma_n(L)$ dans les sections 2.2.2 et 2.2.3.

2.2.1 Démonstration de l'étape 1

Le théorème que nous allons montrer ici a des hypothèses plus fortes que celles des résultats d'Aldous [2] et de Lamberton et Pagès [37] sur la semi-continuité inférieure de la limite. En effet, Lamberton et Pagès partent d'une hypothèse de convergence fini-dimensionnelle qui est beaucoup plus faible que la convergence des processus en probabilité que nous utiliserons ici. Cependant, les hypothèses du théorème 2.2.2 seront suffisantes pour ensuite prouver le théorème 2.2.1. De plus, la preuve proposée ici utilise des arguments de convergence de tribus et de discrétisation et c'est pour ces raisons qu'elle est exposée.

Théorème 2.2.2 *Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus càdlàg tel que $\mathbb{P}[\Delta X_L \neq 0] = 0$ et $\mathcal{F}^X$ la filtration engendrée par ce processus. Soit $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg et $(\mathcal{F}^n)_n$ les filtrations engendrées par ces processus. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Alors $\Gamma(L) \leqslant \liminf \Gamma_n(L)$.*

Démonstration

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Lemme 2.2.3 *Soit τ un $\mathcal{F}^X$-temps d'arrêt borné par L prenant un nombre fini de valeurs notées $\{t_i\}_{i\in I}$ toutes telles que $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$. Pour tout i, on pose $A_i = \{\tau = t_i\}$. On a $A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$. On définit τ^n en posant $\tau^n(\omega) = \min\{t_i : i \in \{j : \mathbb{E}[\mathbf{1}_{A_j}|\mathcal{F}^n_{t_j}](\omega) > 1/2\}\}$ pour tout ω. Alors (τ^n) est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt bornés par L telle que $(\tau^n, X^n_{\tau^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\tau, X_\tau)$.*

Démonstration

$(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt qui converge vers τ d'après le lemme 1.2.8.

De plus, pour tout ω, $\tau^n(\omega) \leqslant \max\{t_i, i \in I\} \leqslant L$ car τ est borné par L. Donc $(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt bornés par L.

Reste à montrer que $X^n_{\tau^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\tau$.
$X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ donc il existe des changements de temps $(\Lambda^n)_n$ tels que $\sup_t |\Lambda^n(t) - t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $\sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)} - X_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. On a :

$$\mathbb{P}[|X^n_{\tau^n} - X_\tau| \geqslant \eta] \leqslant \mathbb{P}[|X^n_{\tau^n} - X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)}| \geqslant \eta/2] + \mathbb{P}[|X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)} - X_\tau| \geqslant \eta/2].$$

Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathbb{P}[\sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)} - X_t| \geqslant \eta/2] \leqslant \varepsilon$ par choix de $(\Lambda^n)_n$. En particulier, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbb{P}[|X^n_{\tau^n} - X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)}| \geqslant \eta/2] \leqslant \varepsilon. \tag{2.1}$$

D'autre part, pour tout $i \in I$ (I fini), $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $i \in I$, pour tout s,

$$|s - t_i| \leqslant \alpha \Rightarrow \mathbb{P}[|X_{t_i} - X_s| \geqslant \eta/2] \leqslant \varepsilon. \tag{2.2}$$

Enfin, $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ et $\sup_t |\Lambda^n(t) - t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, donc

$$|\tau - (\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)| \leqslant |\tau - \tau^n| + |\tau^n - (\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Aussi, il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\mathbb{P}[|\tau - (\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)| \geqslant \alpha] \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Alors, pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[|X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)} - X_\tau| \geqslant \eta/2] \\
&= \mathbb{P}[|X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)} - X_\tau|\mathbf{1}_{|\tau-(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)|\geqslant\alpha} \geqslant \eta/2] \\
&\quad +\mathbb{P}[|X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)} - X_\tau|\mathbf{1}_{|\tau-(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)|<\alpha} \geqslant \eta/2] \\
&\leqslant \mathbb{P}[2\sup_t |X_t|\mathbf{1}_{|\tau-(\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)|\geqslant\alpha} \geqslant \eta/2] + \varepsilon \quad \text{d'après (2.2)} \\
&\leqslant \mathbb{P}[|\tau - (\Lambda^n)^{-1}(\tau^n)| \geqslant \alpha] + \varepsilon \\
&\leqslant 2\varepsilon \quad \text{d'après (2.3).}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Donc, d'après (2.1) et (2.4), pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $\mathbb{P}[|X^n_{\tau^n} - X_\tau| \geqslant \eta] \leqslant 3\varepsilon$.

D'où finalement $(\tau^n, X^n_{\tau^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\tau, X_\tau)$ et le lemme 2.2.3 est alors prouvé. □

Soit π une subdivision de $[0, T]$ ne contenant pas de point de discontinuité fixe de X. On note $\mathcal{T}^\pi_L$ l'ensemble des $\mathcal{F}$-temps d'arrêt à valeurs dans π bornés par L. Puis, on définit :

$$\Gamma^\pi(L) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}^\pi_L} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)].$$

Lemme 2.2.4 $\Gamma^\pi(L) \leqslant \liminf \Gamma_n(L)$.

Démonstration
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $\mathcal{F}^X$-temps d'arrêt τ borné par L à valeurs dans π tel que

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] \geqslant \Gamma^\pi(L) - \varepsilon.$$

D'après le lemme 2.2.3, il existe une suite $(\tau^n)_n$ de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt bornés par L tels que

$$(\tau^n, X^n_{\tau^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\tau, X_\tau).$$

$\mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] \to \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)]$ car γ est continue bornée. De plus, par définition, pour tout n, $\mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] \leqslant \Gamma_n(L)$. A la limite,

$$\liminf \mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] \leqslant \liminf \Gamma_n(L).$$

Or, $\liminf \mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] = \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] \geqslant \Gamma^\pi(L) - \varepsilon$. Aussi,

$$\Gamma^\pi(L) - \varepsilon \leqslant \liminf \Gamma_n(L), \forall \varepsilon > 0.$$

Par suite, $\Gamma^\pi(L) \leqslant \liminf \Gamma_n(L)$. □

Lemme 2.2.5 *Soit $(\pi^k)_k$ une suite croissante de subdivisions ne contenant pas de point de discontinuité fixe de X telle que $L \in \pi^k$ pour tout k (possible car $\mathbb{P}[\Delta X_L \neq 0] = 0$) et $|\pi^k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Alors $\Gamma^{\pi^k}(L) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Gamma(L)$.*

Démonstration
$(\Gamma^{\pi^k}(L))_k$ est une suite croissante majorée par $\Gamma(L)$. Donc $(\Gamma^{\pi^k}(L))_k$ converge vers une limite l avec $l \leqslant \Gamma(L)$. Montrons que $l = \Gamma(L)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\tau \in \mathcal{T}_L$ tel que

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] \geqslant \Gamma(L) - \varepsilon.$$

On note $\pi^k = \{t_1^k, \ldots, t_{K_k}^k\}$. Puis, on pose

$$\tau^k = \sum_{i=1}^{K_k-1} t_{i+1}^k \mathbf{1}_{t_i^k < \tau \leqslant t_{i+1}^k}.$$

Pour tout k, $\tau^k \in \mathcal{T}_L^{\pi^k}$ car τ est borné par L et $L \in \pi^k$. Comme $|\pi^k| \to 0$, on a $\tau^k \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$. De plus, $\tau^k \geqslant \tau$ et X est continu à droite, donc $X_{\tau^k} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\tau$. γ est continue bornée, donc

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^k, X_{\tau^k})] \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)].$$

Or, pour tout k, $\Gamma^{\pi^k}(L) \geqslant \mathbb{E}[\gamma(\tau^k, X_{\tau^k})]$. Donc, à la limite,

$$l \geqslant \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] \geqslant \Gamma(L) - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $l \geqslant \Gamma(L)$.
D'où $\Gamma^{\pi^k}(L) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Gamma(L)$ et le lemme 2.2.5 est prouvé. □

D'après les lemmes 2.2.4 et 2.2.5, on a $\Gamma(L) \leqslant \liminf \Gamma_n(L)$ et le théorème 2.2.2 est démontré. □

Remarque 2.2.6 Si $\mathbb{P}[\Delta X_L \neq 0] > 0$, le résultat n'est pas assuré. Voyons un exemple déterministe dans le cas $L = 1/2$. Soit x et (x^n) des processus définis sur $[0, 1]$ par $x_t = \mathbf{1}_{[1/2,1]}(t)$ et $x_t^n = \mathbf{1}_{[1/2+1/n,1]}(t)$, $\forall t$. On considère $\gamma : [0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(t, y) = y \wedge 2$. γ est une fonction continue bornée. On veut comparer $\Gamma(1/2)$ et la limite de $\Gamma_n(1/2)$ quand n tend vers $+\infty$.
On a : $\Gamma(1/2) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{1/2}} \mathbb{E}[\gamma(\tau, x_\tau)] = \sup_{t\leqslant 1/2} x_t = 1$.
D'autre part, pour tout n, $\Gamma_n(1/2) = \sup_{t\leqslant 1/2} x_t^n = 0$.
Donc $\liminf \Gamma_n(1/2) = 0 < 1 = \Gamma(1/2)$.

Remarque 2.2.7 Le théorème reste vrai si on remplace $\mathcal{F}^X$ par la filtration continue à droite associée $\mathcal{F}$ $(\forall t, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}^X)$ et si on prend $\Gamma(L)$ correspondant à $\mathcal{F}$.

2.2.2 Démonstration de l'étape 2 dans le cas où pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$

Temps d'arrêt randomisés

Nous allons maintenant introduire la notion de temps d'arrêt randomisés définie par Baxter et Chacon [6] et utilisée par Meyer [42] sous le nom de temps d'arrêt flous.

On a une filtration $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $[0,1]$. On considère la filtration $\mathcal{G}$ telle que $\forall t$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$. Une application $\tau : \Omega \times [0,1] \to [0,+\infty]$ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé si τ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt. On note $\mathcal{T}^*$ l'ensemble des temps d'arrêt randomisés et $\mathcal{T}_L^*$ l'ensemble des temps d'arrêt randomisés bornés par L. $\mathcal{T}$ s'injecte dans $\mathcal{T}^*$ par l'application $\tau \mapsto \tau^*$ où $\tau^*(\omega,t) = \tau(\omega)$ pour tout ω, pour tout t. De même, $\mathcal{T}_L$ s'injecte dans $\mathcal{T}_L^*$.

On munit l'espace $\Omega \times [0,1]$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P} \otimes \mu$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Dans leur article [6], Baxter et Chacon définissent la convergence des temps d'arrêt randomisés de la façon suivante :

$$\tau^{*,n} \xrightarrow{BC} \tau^* \text{ ssi } \forall f \in \mathcal{C}_b([0,\infty]), \forall Y \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}), \mathbb{E}[Yf(\tau^{*,n})] \to \mathbb{E}[Yf(\tau^*)],$$

où $\mathcal{C}_b([0,\infty])$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur $[0,\infty]$.
Prenant $Y = 1$, on remarque que cette convergence entraîne la convergence en loi "habituelle".
Cette convergence a été introduite par Renyi [53] sous le nom de convergence stable et étudiée par Jacod et Mémin [25]. Ils indiquent notamment son lien avec la convergence en probabilité que nous donnons ici dans le contexte qui nous intéresse.

Lemme 2.2.8 *Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt qui converge en probabilité vers τ. Alors la suite $(\tau^{*,n})_n$ définie par $\tau^{*,n}(\omega,t) = \tau^n(\omega)$ $\forall\omega$, $\forall t$, converge au sens de la topologie de Baxter et Chacon vers τ^* où $\tau^*(\omega,t) = \tau(\omega)$ $\forall\omega$, $\forall t$.*

Démonstration
Soit $Y \in L^2$ et $f \in \mathcal{C}_b([0,\infty])$.
$\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ et f est continue bornée. Alors, $f(\tau^n) \to f(\tau)$ dans L^2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\mathbb{E}[|Yf(\tau^n) - Yf(\tau)|] \leqslant \mathbb{E}[|Y|^2]^{1/2}\mathbb{E}[|f(\tau^n) - f(\tau)|^2]^{1/2} \to 0.$$

Soit maintenant $Y \in L^1$ et $f \in \mathcal{C}_b([0,\infty])$.
Par densité de L^2 dans L^1, il existe une suite $(Y^k)_k$ de L^2 telle que $Y^k \to Y$ dans L^1. Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|Yf(\tau^n) - Yf(\tau)|] \\
&\quad\leqslant \mathbb{E}[|Yf(\tau^n) - Y^kf(\tau^n)|] + \mathbb{E}[|Y^kf(\tau^n) - Y^kf(\tau)|] + \mathbb{E}[|Y^kf(\tau) - Yf(\tau)|] \\
&\quad\leqslant 2\|f\|_\infty\mathbb{E}[|Y^k - Y|] + \mathbb{E}[|Y^kf(\tau^n) - Y^kf(\tau)|].
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant successivement la lim sup sur n et la limite sur k,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|Yf(\tau^n) - Yf(\tau)|] \\
&\leqslant \; 2\|f\|_\infty \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[|Y^k - Y|] + \lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[|Y^k f(\tau^n) - Y^k f(\tau)|] \\
&= \; 0 \;\text{ car } Y^k \to Y \text{ dans } L^1 \text{ et d'après le premier cas.}
\end{aligned}$$

Or par définition de $(\tau^{*,n})_n$ et de τ^*, $\mathbb{E}[|Yf(\tau^n) - Yf(\tau)|] = \mathbb{E}[|Yf(\tau^{*,n}) - Yf(\tau^*)|]$. Donc, $\mathbb{E}[Yf(\tau^{*,n})] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[Yf(\tau^*)]$. Par conséquent, $\tau^{*,n} \xrightarrow{BC} \tau^*$. □

Un des intérêts de cette notion est, comme le montrent Baxter et Chacon dans le théorème 1.5 de l'article [6], que l'ensemble des temps d'arrêt randomisés pour une filtration continue à droite est compact pour la topologie de la convergence de Baxter et Chacon.

La proposition suivante est la clé de la démonstration du théorème 2.2.14.

Proposition 2.2.9 *Soit $(\mathcal{F}^n)$ une suite de filtrations et $\mathcal{F}$ une filtration continue à droite telles que $\forall n$, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{T}_L^n)_n$. Il existe un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé τ^* et une sous-suite $(\tau^{\varphi(n)})_n$ telle que $\tau^{*,\varphi(n)} \xrightarrow{BC} \tau^*$ où pour tout n, $\tau^{*,n}(\omega,t) = \tau^n(\omega)$ $\forall\omega$, $\forall t$.*

Démonstration
Pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$, donc $(\tau^n)_n$ est une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Aussi, par construction, $(\tau^{*,n})_n$ est une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisés. D'après le théorème 1.5 dans l'article de Baxter et Chacon [6], il existe un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé τ^* et une sous-suite $(\tau^{\varphi(n)})_n$ telle que $\tau^{*,\varphi(n)} \xrightarrow{BC} \tau^*$. □

D'autre part, on définit la variable aléatoire X_τ par $X_\tau(\omega,v) = X_{\tau(\omega,v)}(\omega)$ sur $\Omega \times [0,1]$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.10 *On définit* $\Gamma^*(L) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_L^*} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)]$. *Alors* $\Gamma^*(L) = \Gamma(L)$.

Démonstration
- $\mathcal{T}_L$ s'injecte dans $\mathcal{T}_L^*$. Donc $\Gamma(L) \leqslant \Gamma^*(L)$.
- Soit $\tau^* \in \mathcal{T}_L^*$. On considère, pour tout v, $\tau_v(\omega) = \tau^*(\omega, v), \forall\omega$.
Pour tout $v \in [0,1]$, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\{\omega : \tau_v(\omega) \leqslant t\} \times \{v\} = \{(\omega,x) : \tau^*(\omega,x) \leqslant t\} \cap (\Omega \times \{v\}).$$

Or, $\{(\omega,x) : \tau^*(\omega,x) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ car τ^* est un $\mathcal{F}$ temps d'arrêt randomisé et $\Omega \times \{v\} \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$. Donc, $\{\omega : \tau_v(\omega) \leqslant t\} \times \{v\} \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$. Par conséquent,

$$\{\omega : \tau_v(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Aussi, pour tout v, τ_v est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt borné par L. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] &= \int_\Omega \int_0^1 \gamma(\tau^*(\omega,v), X_{\tau^*(\omega,v)}(\omega))d\mathbb{P}(\omega)dv \\ &= \int_0^1 \left(\int_\Omega \gamma(\tau^*(\omega,v), X_{\tau_v(\omega)}(\omega))d\mathbb{P}(\omega)\right) dv \\ &= \int_0^1 \mathbb{E}[\gamma(\tau_v, X_{\tau_v})]dv \\ &\leqslant \Gamma(L) \text{ car, pour tout } v,\ \tau_v \in \mathcal{T}_L.\end{aligned}$$

En passant au sup sur τ^* dans $\mathcal{T}_L^*$, il vient $\Gamma^*(L) \leqslant \Gamma(L)$.
D'où la conclusion. □

Voyons une propriété analogue à la proposition 1.1.34 faisant intervenir les temps d'arrêt randomisés.

Proposition 2.2.11 *Soit $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg qui converge en loi vers un processus càdlàg X. On note $\mathcal{F}^n$ les filtrations engendrées par les processus X^n et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à celle engendrée par le processus X. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt telle que la suite $(\tau^{*,n})_n$ de temps d'arrêt randomisés associée ($\tau^{*,n}(\omega,t) = \tau^n(\omega)\ \forall\omega,\ \forall t$) converge en loi vers une variable aléatoire V. On suppose que $(\tau^{*,n}, X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (V, X)$ et que le critère de tension d'Aldous (1.2) est vérifié. Alors $(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (V, X_V)$.*

Démonstration
On raisonne comme Aldous dans la démonstration de la proposition 1.1.34 (corollaire 16.23 dans [2]). Comme (X^n) converge en loi vers X et (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous, X est quasi continu à gauche d'après la proposition 1.1.38.

Cas 1 : $\mathbb{P}[\Delta X_V \neq 0] = 0$.
Grâce au théorème de représentation de Skorokhod, on se ramène au cas où on a $(\tau^{*,n}, X^n) \xrightarrow{p.s.} (V, X)$.
Soit (Λ^n) une suite de changements de temps associée à la convergence presque sûre de (X^n) vers X. On a $\sup_t |\Lambda^n(t) - t| \xrightarrow{p.s.} 0$ et $\sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)} - X_t| \xrightarrow{p.s.} 0$. Il existe donc un ensemble négligeable E tel que pour tout $\omega \notin E$, $\Delta X_V(\omega) = 0$, $\tau^{*,n}(\omega) \to V(\omega)$, $\sup_t |\Lambda^n(t,\omega) - t| \to 0$ et $\sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)}(\omega) - X_t(\omega)| \to 0$. On va montrer que $\forall\omega \notin E$, $X^n_{\tau^{*,n}}(\omega) \to X_V(\omega)$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\omega \notin E$.
$X(\omega)$ est continu en $V(\omega)$. Donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout t,

$$|t - V(\omega)| \leqslant \eta \Rightarrow |X_t(\omega) - X_{V(\omega)}(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

$|\Lambda^n(V(\omega),\omega) - V(\omega)| \to 0$. Comme pour tout ω, $\Lambda^n(\omega) : [0,T] \to [0,T]$ est bijective, $|V(\omega) - (\Lambda^n)^{-1}(V(\omega),\omega)| \to 0$. Alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|(\Lambda^n)^{-1}(V(\omega),\omega) - V(\omega)| \leqslant \eta.$$

Enfin, $\sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)}(\omega) - X_t(\omega)| \to 0$ donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)}(\omega) - X_t(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,

$$\begin{aligned}|X^n_{\tau^{*,n}}(\omega) - X_V(\omega)| &\leqslant |X^n_{\tau^{*,n}}(\omega) - X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^{*,n})}(\omega)| + |X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^{*,n})}(\omega) - X_V(\omega)| \\ &\leqslant \sup_t |X^n_{\Lambda^n(t)}(\omega) - X_t(\omega)| + |X_{(\Lambda^n)^{-1}(\tau^{*,n})}(\omega) - X_V(\omega)| \\ &\leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, $X^n_{\tau^{*,n}} \xrightarrow{p.s.} X_V$, puis $(\tau^{*,n}, X^n) \xrightarrow{p.s.} (V, X)$.
Par conséquent, $(\tau^{*,n}, X^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (V, X)$.

Cas 2 : $\mathbb{P}[\Delta X_V \neq 0] > 0$.
$Y_t = X_{V+t}$ est un processus càdlàg car X est càdlàg. Donc $\{t : \mathbb{P}[\Delta X_{V+t} \neq 0] > 0\}$ est au plus dénombrable. On peut donc trouver une suite $(\delta_k)_k$ qui décroît vers 0 telle que pour tout k, $\mathbb{P}[\Delta X_{V+\delta_k} \neq 0] = 0$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uniformément continue bornée.

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(V, X_V)]| \leqslant\ & |\mathbb{E}[f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})]| \\ & +|\mathbb{E}[f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}) - f(V + \delta_k, X_{V+\delta_k})]| \\ & +|\mathbb{E}[f(V + \delta_k, X_{V+\delta_k}) - f(V, X_V)]|.\end{aligned}$$

Or :
- $\forall k$, $\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}) - f(V + \delta_k, X_{V+\delta_k})] = 0$ d'après le 1er cas, donc $\lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}) - f(V + \delta_k, X_{V+\delta_k})] = 0$.
- $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}[f(V + \delta_k, X_{V+\delta_k}) - f(V, X_V)] = 0$ car X est continu à droite $X_{V+\delta_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{p.s.} X_V$ puisque X est continu à droite. Donc, $\lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(V + \delta_k, X_{V+\delta_k}) - f(V, X_V)] = 0$.
- $\lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})] = 0$ d'après la condition d'Aldous. En effet, soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue bornée, donc il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - y\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}[f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})]| \\ &\leqslant \mathbb{E}[|(f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}))|\mathbf{1}_{\|(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - (\tau^{*,n}+\delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})\| > \eta}]| \\ &\quad +\mathbb{E}[|(f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}))|\mathbf{1}_{\|(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - (\tau^{*,n}+\delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})\| \leqslant \eta}]| \\ &\leqslant \mathbb{E}[2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{\|(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - (\tau^{*,n}+\delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})\| > \eta}]| + \varepsilon \\ &\qquad \text{car } f \text{ est bornée et par choix de } \eta \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty (\mathbb{P} \otimes \mu)[\|(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - (\tau^{*,n} + \delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})\| > \eta] + \varepsilon.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{P}\otimes\mu)[\|(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - (\tau^{*,n}+\delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})\| > \eta] \\
&= (\mathbb{P}\otimes\mu)[\max\{|\tau^{*,n} - (\tau^{*,n}+\delta_k)|, |X^n_{\tau^{*,n}} - X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}|\} > \eta] \\
&= (\mathbb{P}\otimes\mu)[\max\{\delta_k, |X^n_{\tau^{*,n}} - X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k}|\} > \eta] \\
&= \mathbb{P}[\max\{\delta_k, |X^n_{\tau^n} - X^n_{\tau^n+\delta_k}|\} > \eta] \quad \text{par définition des } \tau^{*,n} \\
&\leqslant \mathbb{P}[\delta_k > \eta] + \mathbb{P}[|X^n_{\tau^n} - X^n_{\tau^n+\delta_k}| > \eta].
\end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{k\to+\infty}\limsup\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}[\delta_k > \eta] + \mathbb{P}[|X^n_{\tau^n} - X^n_{\tau^n+\delta_k}| > \eta] = 0$ d'après la condition d'Aldous et parce que $(\delta_k)_k$ décroît vers 0.
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}|\mathbb{E}[f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n}+\delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})]| \leqslant \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, il vient

$$\lim_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty}\mathbb{E}[f(\tau^{*,n}, X^n_{\tau^{*,n}}) - f(\tau^{*,n}+\delta_k, X^n_{\tau^{*,n}+\delta_k})] = 0.$$

D'où la conclusion. □

Remarque 2.2.12 On notera que, dans cette proposition, la condition d'Aldous (1.2) porte sur les temps d'arrêt de départ (et pas sur les temps d'arrêt randomisés associés).

Dans le cas où $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et où $(\tau^{*,n})_n$ est une suite de temps d'arrêt randomisés qui converge au sens de la topologie de Baxter et Chacon vers τ, on a la convergence en loi du couple $((X^n, \tau^n))_n$ vers le couple (X, τ) :

Proposition 2.2.13 *Soit $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg qui converge en probabilité vers un processus càdlàg X. On note $\mathcal{F}^n$ les filtrations engendrées par les processus X^n et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à celle engendrée par le processus X. Soit $(\tau^{*,n})_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt randomisés qui converge au sens de la topologie de Baxter et Chacon vers le temps d'arrêt randomisé τ^*. Alors $(X^n, \tau^{*,n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^*)$.*

Démonstration
- Comme $(X^n)_n$ et $(\tau^{*,n})_n$ sont tendues, $((X^n, \tau^{*,n}))_n$ est tendue (cf problème 5.9 Section 6 dans Billingsley [7]).
- On va maintenant identifier la limite grâce à la convergence fini-dimensionnelle.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et $t_1 < \ldots < t_k$ tels que pour tout i, $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$. Montrons que $(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)$.
Considérons dans un premier temps $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues bornées.

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{E}[f(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k})g(\tau^{*,n})] - \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})g(\tau^*)]| \\
&\leqslant |\mathbb{E}[(f(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) - f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}))g(\tau^{*,n})]| \\
&\quad + |\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})g(\tau^{*,n})] - \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})g(\tau^*)]| \\
&\leqslant \|g\|_\infty\mathbb{E}[|f(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) - f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})|] \\
&\quad + |\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})g(\tau^{*,n})] - \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})g(\tau^*)]|
\end{aligned}$$

Or, $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et pour tout i, $\mathbb{P}[\Delta X_{t_i} \neq 0] = 0$ donc on a la convergence suivante :

$$(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}).$$

De plus, f est continue bornée, donc

$$\mathbb{E}[|f(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) - f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})|] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'autre part, par définition de la convergence au sens de la topologie de Baxter et Chacon,

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) g(\tau^{*,n})] - \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) g(\tau^*)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[f(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) g(\tau^{*,n})] - \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) g(\tau^*)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Soit maintenant $\varphi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ continue bornée.
Soit $\varepsilon > 0$.
$((X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n}))_n$ est tendue. Il existe donc un compact K_ε tel que

$$\mathbb{P}[(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n}) \notin K_\varepsilon] \leqslant \varepsilon. \tag{2.5}$$

On écrit $\varphi = \varphi \mathbf{1}_{K_\varepsilon} + \varphi \mathbf{1}_{K_\varepsilon^c}$.
$\varphi \mathbf{1}_{K_\varepsilon}$ est une fonction continue sur le compact K_ε. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynômiale P telle que

$$\|\varphi \mathbf{1}_{K_\varepsilon} - P \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_\infty \leqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{degP} \sum_{i_1 + \cdots + i_{k+1} = i} a_n x_1^{i_1} \ldots x_{k+1}^{i_{k+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{degP} \sum_{i_1 + \cdots + i_{k+1} = i} a_n f_{(i_1, \ldots, i_{k+1})}(x_1, \ldots, x_k) g_{i_{k+1}}(x_{k+1}), \end{aligned}$$

où $f_{(i_1, \ldots, i_{k+1})} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est définie par $f_{(i_1, \ldots, i_{k+1})}(x_1, \ldots, x_k) = x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$ et où $g_{i_{k+1}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_{i_{k+1}}(x_{k+1}) = x_{k+1}^{i_{k+1}}$. $f_{(i_1, \ldots, i_{k+1})}$ et $g_{i_{k+1}}$ sont continues bornées. En appliquant ce qui précède et en utilisant la linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[(P \mathbf{1}_{K_\varepsilon})(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[(P \mathbf{1}_{K_\varepsilon})(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{2.7}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}[\varphi(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[\varphi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)]| \\ &= |\mathbb{E}[(\varphi(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[\varphi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)) \mathbf{1}_{K_\varepsilon}(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[(\varphi(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[\varphi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)) \mathbf{1}_{K_\varepsilon^c}(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})]| \\ &\leqslant 2\|\varphi \mathbf{1}_{K_\varepsilon} - P \mathbf{1}_{K_\varepsilon}\|_\infty \\ &\qquad + \mathbb{E}[(P \mathbf{1}_{K_\varepsilon})(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[(P \mathbf{1}_{K_\varepsilon})(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)] \\ &\qquad\quad + \|\varphi\|_\infty \mathbb{P}[(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n}) \notin K_\varepsilon] \\ &\leqslant \mathbb{E}[(P \mathbf{1}_{K_\varepsilon})(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[(P \mathbf{1}_{K_\varepsilon})(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}, \tau^*)] \\ &\qquad + (2 + \|\varphi\|_\infty)\varepsilon \ \text{ d'après (2.5) et (2.6).} \end{aligned}$$

En passant à la limite sur n, d'après (2.7), il vient :

$$\limsup_n |\mathbb{E}[\varphi(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] - \mathbb{E}[\varphi(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}, \tau^*)]| \leqslant (2 + \|\varphi\|_\infty)\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n})] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}, \tau^*)].$$

Ainsi, $(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}, \tau^*)$.

La tension de la suite $((X^n, \tau^{*,n}))_n$ et la convergence fini-dimensionnelle sur un ensemble dense vers (X, τ^*) entraînent $(X^n, \tau^{*,n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^*)$. □

Application à la démonstration de l'étape 2

Nous pouvons maintenant démontrer, toujours dans notre contexte d'inclusion des filtrations, le résultat prouvant que la limite supérieure des réduites associées aux X^n est inférieure à la réduite associée à X.

Théorème 2.2.14 *Soit X un processus càdlàg et $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg. Soit $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à la filtration engendrée par X et $(\mathcal{F}^n)_n$ la suite des filtrations engendrées par les processus $(X^n)_n$. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, que (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2) et pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$.*
Alors $\limsup \Gamma_n(L) \leqslant \Gamma(L)$.

Démonstration
Il existe une sous-suite $(\Gamma_{\varphi(n)}(L))_n$ qui converge vers $\limsup \Gamma_n(L)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(\tau^{\varphi(n)})_n$ de $(\mathcal{T}_L^{\varphi(n)})_n$ telle que

$$\forall n, \mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}})] \geqslant \Gamma_{\varphi(n)}(L) - \varepsilon.$$

On considère la suite $(\tau^{*,n})_n$ de temps d'arrêt randomisés associée à $(\tau^n)_n$: pour tout n, $\tau^{*,n}(\omega, t) = \tau^n(\omega)$, $\forall \omega$, $\forall t$.
$\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$, donc d'après la proposition 2.2.9, il existe un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé τ^* et une sous-suite $(\tau^{\varphi(n)})$ telle que $\tau^{*,\varphi(n)} \xrightarrow{BC} \tau^*$.
$X^{\varphi(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $\tau^{*,\varphi(n)} \xrightarrow{BC} \tau^*$, donc d'après la proposition 2.2.13,

$$(X^{\varphi(n)}, \tau^{*,\varphi(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^*).$$

Par hypothèse, le critère de tension d'Aldous (1.2) est vérifié. Alors, d'après la proposition 2.2.11, on a :

$$(\tau^{*,\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{*,\varphi(n)}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\tau^*, X_{\tau^*}).$$

Comme γ est continue bornée, on a :

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^{*,\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{*,\varphi(n)}})] \to \mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})].$$

Or, $\mathbb{E}[\gamma(\tau^{*,\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{*,\varphi(n)}})] = \mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}})]$ par définition des $(\tau^{*,n})$ et, par choix de φ, $\mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}})] \geqslant \Gamma_{\varphi(n)}(L) - \varepsilon$. Donc à la limite,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] \geqslant \limsup \Gamma_{\varphi(n)}(L) - \varepsilon.$$

Par choix de φ, $\limsup \Gamma_{\varphi(n)}(L) = \limsup \Gamma_n(L)$. Donc,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] \geqslant \limsup \Gamma_n(L) - \varepsilon.$$

Par définition, $\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] \leqslant \Gamma^*(L)$ car τ^* est un temps d'arrêt randomisé. De plus, $\Gamma^*(L) = \Gamma(L)$ d'après le lemme 2.2.10. Donc,

$$\Gamma(L) \geqslant \limsup \Gamma_n(L) - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\Gamma(L) \geqslant \limsup \Gamma_n(L)$. □

Remarque 2.2.15 Dans le théorème précédent, le point clé est que l'on connait la nature de la limite de la sous-suite convergente de temps d'arrêt d'après la proposition 2.2.9. Si on supprime l'hypothèse d'inclusion des filtrations $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}, \forall n$, la limite de la suite extraite n'est plus un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé. On ne peut alors plus comparer $\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})]$ et $\Gamma^*(L)$ avec le lemme 2.2.10 .

2.2.3 Démonstration de l'étape 2 dans le cas où $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$

Théorème 2.2.16 *Soit $(X^n)_n$ une suite de processus càdlg̀ et X un processus càdlàg. On considère les filtrations $(\mathcal{F}^n)_n$ engendrées par les $(X^n)_n$ et la filtration $\mathcal{F}$ continue à droite associée à la filtration engendrée par le processus X. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2) et $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. On a alors l'inégalité $\limsup \Gamma_n(L) \leqslant \Gamma(L)$.*

Démonstration
On raisonne à peu près comme Aldous dans la 2e partie de la démonstration du théorème 17.2 dans [2].
Il existe une sous-suite $(\Gamma_{\varphi(n)}(L))_n$ qui converge vers $\limsup \Gamma_n(L)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une suite $(\tau^{\varphi(n)})_n$ de $(\mathcal{T}_L^{\varphi(n)})_n$ telle que

$$\forall n, \mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}})] \geqslant \Gamma_{\varphi(n)}(L) - \varepsilon.$$

Soit $(\tau^{*,n})_n$ la suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt randomisés associée comme en 2.2.2. En considérant la filtration $\mathcal{H} = \bigvee_n \mathcal{F}^n$, $(\tau^{*,n})$ est une suite bornée de $\mathcal{H}$-temps d'arrêt randomisés. Alors, d'après le théorème 1.5 de Baxter et Chacon dans [6], il existe une fonction croissante φ et un $\mathcal{H}$-temps d'arrêt randomisé τ^* (τ^* n'est a priori pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé) tels que

$$\tau^{*,\varphi(n)} \xrightarrow{BC} \tau^*.$$

D'après la proposition 2.2.13, on a alors $(X^{\varphi(n)}, \tau^{*,\varphi(n)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^*)$. De plus, le critère de tension d'Aldous (1.2) est vérifié. Alors, d'après la proposition 2.2.11, on a la convergence $(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\tau^*, X_{\tau^*})$. Donc,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}})] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})].$$

D'autre part, $\mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}})] \geqslant \Gamma_{\varphi(n)}(L) - \varepsilon$. Donc, en faisant tendre n vers l'infini, il vient :

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] \geqslant \limsup \Gamma_n(L) - \varepsilon. \tag{2.8}$$

Reste maintenant à comparer $\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})]$ et $\Gamma(L)$.
Soit $\mathcal{G}$ la plus petite filtration continue à droite telle que X soit $\mathcal{G}$ adapté et τ^* un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt randomisé. Il est clair que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Pour tout t, on peut décrire la tribu produit $\mathcal{G}_t \times \mathcal{B}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{G}_t \times \mathcal{B} = \bigcap_{s>t} \sigma(A \times B, \{\tau^* \leqslant u\}, A \in \mathcal{F}_s, u \leqslant s, B \in \mathcal{B}).$$

On considère l'ensemble $\tilde{\mathcal{T}}_L$ des $\mathcal{G}$-temps d'arrêt randomisés bornés par L et on définit $\tilde{\Gamma}(L) = \sup_{\tilde{\tau} \in \tilde{\mathcal{T}}_L} \mathbb{E}[\gamma(\tilde{\tau}, X_{\tilde{\tau}})]$.

Par construction de $\mathcal{G}$, $\tau^* \in \tilde{\mathcal{T}}_L$ donc $\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] \leqslant \tilde{\Gamma}(L)$. Alors, en utilisant (2.8) et en faisant tendre ε vers 0, on a :

$$\tilde{\Gamma}(L) \geqslant \limsup \Gamma_n(L). \tag{2.9}$$

On va conclure grâce au lemme suivant qui est l'adaptation de la proposition 3.5 de D. Lamberton et G. Pagès dans [37] à notre cadre de grossissement de filtration :

Lemme 2.2.17 *Si $\mathcal{G}_t \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$ sont conditionnellement indépendantes connaissant $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ pour tout $t \in [0, T]$, alors $\tilde{\Gamma}(L) = \Gamma^*(L)$.*

Démonstration
- $\mathcal{T}^*_L \subset \tilde{\mathcal{T}}_L$ donc $\Gamma^*(L) \leqslant \tilde{\Gamma}(L)$.
- On considère le processus X^* tel que pour tout ω, pour tout $v \in [0, 1]$, pour tout $t \in [0, T]$, $X^*_t(\omega, v) = X_t(\omega)$. X^* est $(\mathcal{F}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ adapté.
On va maintenant utiliser les résultats faisant intervenir l'enveloppe de Snell exposés dans l'article [33] de N. El Karoui.
Soit Y^* le processus défini par $\forall \omega, \forall v, \forall t, Y^*_t(\omega, v) = \gamma(t, X^*_t(\omega, v))$. Y^* est un processus càdlàg borné $(\mathcal{F}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ adapté. On considère son enveloppe de Snell Z. Z est donc la plus petite $(\mathcal{F}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ surmartingale majorant Y^*.
D'autre part, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ donc Y^* est $(\mathcal{G}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ adapté. On considère comme avant la plus petite $(\mathcal{G}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ surmartingale $\tilde{Z}$ majorant Y^*.
Z est $(\mathcal{G}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ adapté par inclusion des filtrations. De plus, grâce à la condition d'indépendance conditionnelle, Z est une $(\mathcal{G}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ surmartingale. En effet, pour tout $s \leqslant t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{G}_s \times \mathcal{B}] &= \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s \times \mathcal{B}] \ \text{ par indépendance conditionnelle (cf (2.10) ci-dessous)} \\ &\leqslant Z_s \ \text{ car } Z \text{ est une } (\mathcal{F}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]} \text{ surmartingale.} \end{aligned}$$

Ainsi, Z est une $(\mathcal{G}_t \times \mathcal{B})_{t \in [0,T]}$ surmartingale majorant Y^*. Mais $\tilde{Z}$ est la plus petite par construction. Donc, $\tilde{Z} \leqslant Z$.
D'autre part, par propriété de l'enveloppe de Snell (cf 2.12 dans El Karoui [33]),

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}_0] = \tilde{\Gamma}(L) \ \text{ et } \ \mathbb{E}[Z_0] = \Gamma^*(L).$$

Ainsi, $\tilde{\Gamma}(L) = \mathbb{E}[\tilde{Z}_0] \leqslant \mathbb{E}[Z_0] = \Gamma^*(L)$. En particulier, $\tilde{\Gamma}(L) \leqslant \Gamma^*(L)$.
D'où le lemme 2.2.17. □

D'après le théorème 3 dans l'article [9] de Brémaud et Yor, la condition d'indépendance conditionnelle du lemme est équivalente à l'assertion suivante :

$$\forall t \in [0,T], \forall Z \in L^1(\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}), \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}] = \mathbb{E}[Z|\mathcal{G}_t \times \mathcal{B}]. \tag{2.10}$$

Nous allons maintenant montrer que les hypothèses du théorème 2.2.16 entraînent celles du lemme 2.2.17 en montrant l'égalité (2.10). Notons que c'est pour montrer l'égalité (2.10) qu'Aldous dans [2] et Lamberton et Pagès dans [37] se servent de la convergence étendue.

Pour alléger les notations, dans toute la suite on supposera que $\tau^n \xrightarrow{BC} \tau$ au lieu de $\tau^{\varphi(n)} \xrightarrow{BC} \tau$.
D'autre part, on désignera par « point de continuité » d'un processus Y les points de continuité en probabilité, ie les instants t tels que $\mathbb{P}[\Delta Y_t \neq 0] = 0$. Comme $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2), d'après la proposition 1.1.38, X est quasi continu à gauche et a fortiori continu en probabilité en tout point.

- Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, pour tout t, $\forall Z \in L^1(\mathcal{F}_T \times \mathcal{B})$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z|\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}]$ est $\mathcal{G}_t \times \mathcal{B}$ mesurable.
- Montrons que $\forall t \in [0,T], \forall Z \in L^1(\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}), \forall C \in \mathcal{G}_t \times \mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z|\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}]\mathbf{1}_C] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z\mathbf{1}_C].$$

Soit $t \in [0,T]$. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $Z \in L^1(\mathcal{F}_T \times \mathcal{B})$. Par définition de $\mathcal{G}_t \times \mathcal{B}$, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, pour tout $s \leqslant t$ et pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega\times[0,1]} & Z(\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d\mathbb{P}(\omega)dv \\ = & \int\int_{\Omega\times[0,1]} \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z|\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d\mathbb{P}(\omega)dv.\end{aligned} \tag{2.11}$$

L'essentiel de la démonstration va consister à montrer (2.11) pour les variables aléatoires Z de la forme $Z = \mathbf{1}_{A_1\times A_2}$, $A_1 \in \mathcal{F}_T$, $A_2 \in \mathcal{B}$, la généralisation à Z quelconque étant ensuite obtenue par des arguments classiques.

Voici le schéma de la preuve dans le cas $Z = \mathbf{1}_{A_1\times A_2}$, détaillée juste après.
Afin de pouvoir utiliser des arguments de convergence fini-dimensionnelle, on va tout d'abord approcher toutes les variables aléatoires présentes $\mathbf{1}_{A_1}$, $\mathbf{1}_A$, $\mathbf{1}_{\{\tau^*\leqslant s\}}$ et $\mathbf{1}_B$ par $f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})$, $H(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})$, $G(\tau^*\wedge u)$ et $g(v)$ où les fonctions f, H, G et g sont continues bornées.

On va ensuite montrer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\int\int \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\otimes\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
= &\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v).
\end{aligned}$$

Pour ce faire, on va prouver les convergences suivantes qui seront respectivement l'objet des lemmes 2.2.18 et 2.2.19 :

$$\begin{aligned}
&\int\int f(X^n_{s_1}(\omega),\dots,X^n_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\xrightarrow[n\to+\infty]{} &\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\xrightarrow[n\to+\infty]{} &\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que les deux suites sont en fait égales, l'unicité de la limite permettra de conclure. C'est dans la preuve du lemme 2.2.19 que l'hypothèse de convergence de filtrations est utilisée.

On utilise ensuite les différentes approximations faites pour revenir aux processus initiaux et obtenir ainsi l'égalité (2.11) pour $Z = \mathbf{1}_{A_1\times A_2}$.

On commence donc la preuve par différentes approximations.
Il existe $l\in\mathbb{N}$ et $s_1<\ldots<s_l$ et une fonction f continue bornée tels que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbf{1}_{A_1} - f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|] \leqslant \varepsilon. \tag{2.12}$$

Alors

$$\int\int |\mathbf{1}_{A_1\times A_2}(\omega,v) - f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)|d\mathbb{P}(\omega)dv \leqslant \varepsilon.$$

Soit $A\in\mathcal{F}_t$. Il existe $k\in\mathbb{N}$, des instants $t_1<\ldots<t_k\leqslant t$ et $H:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ continue bornée tels que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbf{1}_A - H(X_{t_1},\dots,X_{t_k})|] \leqslant \varepsilon. \tag{2.13}$$

Soit $u\geqslant t$ un point de continuité de $\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_.]$.
Soit $s\leqslant t$. Il existe G continue bornée telle que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[|\mathbf{1}_{\{\tau^*\leqslant s\}} - G(\tau^*\wedge u)|] \leqslant \varepsilon. \tag{2.14}$$

$B \in \mathcal{B}$ et les fonctions continues sont denses dans $L^1(\mu)$, donc il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée telle que

$$\int |\mathbf{1}_B(v) - g(v)|dv \leqslant \varepsilon. \tag{2.15}$$

$X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, X est quasi continu à gauche et f est une fonction continue bornée, donc

$$f(X^n_{s_1}, \dots, X^n_{s_l}) \xrightarrow{L^1} f(X_{s_1}, \dots, X_{s_l}). \tag{2.16}$$

Comme annoncé, nous nous proposons de montrer que

$$\begin{aligned} & \int\int \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[f(X_{s_1}, \dots, X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u \otimes \mathcal{B}](\omega, v)H(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \\ & \qquad G(\tau^*(\omega, v) \wedge u)g(v)d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \\ = & \int\int f(X_{s_1}(\omega), \dots, X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \\ & \qquad G(\tau^*(\omega, v) \wedge u)g(v)d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.18 *On a la convergence :*

$$\begin{aligned} & \int\int f(X^n_{s_1}(\omega), \dots, X^n_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega), \dots, X^n_{t_k}(\omega)) \\ & \qquad G(\tau^{*,n}(\omega, v) \wedge u)g(v)d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} & \int\int f(X_{s_1}(\omega), \dots, X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \\ & \qquad G(\tau^*(\omega, v) \wedge u)g(v)d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \end{aligned}$$

Démonstration

On considère les applications $\tilde{H}$, $\tilde{G}$ et $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}^{k+l+2}$ dans $\mathbb{R}$ définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_k, z, v) &= H(y_1, \dots, y_k), \\ \tilde{G}(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_k, z, v) &= G(z), \\ \tilde{g}(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_k, z, v) &= g(v). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon' > 0$.

Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{P}_{(X_{s_1},\dots,X_{s_l})} \otimes \mu)$, donc il existe $h : \mathbb{R}^{l+1} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int\int |h(x_1, \dots, x_l, v) - f(x_1, \dots, x_l)\mathbf{1}_{A_2}(v)|d(\mathbb{P}_{(X_{s_1},\dots,X_{s_l})} \otimes \mu)(\omega, v) \leqslant \varepsilon'. \tag{2.17}$$

$X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, X est quasi continu à gauche et h est une fonction continue bornée, donc

$$\int\int |h(X^n_{s_1}(\omega), \dots, X^n_{s_l}(\omega), v) - h(X_{s_1}(\omega), \dots, X_{s_l}(\omega), v)|d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{2.18}$$

On considère alors :

$$\tilde{h}(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_k, z, v) = h(x_1, \dots, x_l, v).$$

$\tilde{h}\tilde{H}\tilde{G}\tilde{g}$ est une application continue bornée comme produit d'application continues bornées.
De plus, $(X^n, \tau^{*,n}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^*)$ donc $(X^n, \tau^{*,n} \wedge u) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^* \wedge u)$.
Soit $U : \Omega \times [0,1] \to [0,1]$ la variable aléatoire telle que $\forall \omega, \forall v, U(\omega, v) = v$. Par les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 2.2.13, on a :

$$(X^n, \tau^{*,n} \wedge u, U) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, \tau^* \wedge u, U).$$

X est quasi continu à gauche, donc

$$(X^n_{s_1}, \dots, X^n_{s_l}, X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n} \wedge u, U) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{s_1}, \dots, X_{s_l}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k}, \tau^* \wedge u, U).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[(\tilde{h}\tilde{H}\tilde{G}\tilde{g})(X^n_{s_1}, \dots, X^n_{s_l}, X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}, \tau^{*,n} \wedge u, U)] \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad &\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[(\tilde{h}\tilde{H}\tilde{G}\tilde{g})(X_{s_1}, \dots, X_{s_l}, X_{t_1}, \dots, X_{t_k}, \tau^* \wedge u, U)]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Par construction des fonctions $\tilde{h}$, $\tilde{H}$, $\tilde{G}$ et $\tilde{g}$, on a alors :

$$\begin{aligned} &\int\int h(X^n_{s_1}(\omega), \dots, X^n_{s_l}(\omega), v) H(X^n_{t_1}(\omega), \dots, X^n_{t_k}(\omega)) \\ &\qquad G(\tau^{*,n}(\omega, v) \wedge u) g(v) d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad &\int\int h(X_{s_1}(\omega), \dots, X_{s_l}(\omega), v) H(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \\ &\qquad G(\tau^*(\omega, v) \wedge u) g(v) d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Big| &\int\int f(X^n_{s_1}(\omega), \dots, X^n_{s_l}(\omega)) \mathbf{1}_{A_2}(v) H(X^n_{t_1}(\omega), \dots, X^n_{t_k}(\omega)) \\ &\qquad G(\tau^{*,n}(\omega, v) \wedge u) g(v) d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \\ - &\int\int f(X_{s_1}(\omega), \dots, X_{s_l}(\omega)) \mathbf{1}_{A_2}(v) H(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \\ &\qquad G(\tau^*(\omega, v) \wedge u) g(v) d(\mathbb{P} \otimes \mu)(\omega, v) \Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leqslant \quad & \int\int |(f(X^n_{s_1}(\omega),\ldots,X^n_{s_l}(\omega)) - f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega)))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
& \qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
& + \int\int |(f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) - h(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega),v)) \\
& \qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
& + \int\int |(h(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega),v) - h(X^n_{s_1}(\omega),\ldots,X^n_{s_l}(\omega),v)) \\
& \qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
& + \Big| \int\int h(X^n_{s_1}(\omega),\ldots,X^n_{s_l}(\omega),v)H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega)) \\
& \qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
& - \int\int h(X_{s_1},\ldots,X_{s_l}(\omega),v)H(X_{t_1}(\omega),\ldots,X_{t_k}(\omega)) \\
& \qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
& + \int\int |(h(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega),v) - f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)) \\
& \qquad H(X_{t_1}(\omega),\ldots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
& \limsup_n \int\int |(f(X^n_{s_1}(\omega),\ldots,X^n_{s_l}(\omega)) - f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega)))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
& \qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
\leqslant \quad & \|H\|_\infty \|G\|_\infty \|g\|_\infty \\
& \qquad \limsup_n \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l}) - f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})|] \\
= \quad & 0 \quad \text{d'après (2.16)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \limsup_n \int\int |(f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) - h(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega),v)) \\
& \qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
\leqslant \quad & \|H\|_\infty \|G\|_\infty \|g\|_\infty \\
& \limsup_n \int\int |f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) - h(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega),v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
\leqslant \quad & \|H\|_\infty \|G\|_\infty \|g\|_\infty \varepsilon' \quad \text{d'après (2.17)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \int\int |(h(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega),v) - h(X^n_{s_1}(\omega),\dots,X^n_{s_l}(\omega),v))\\
&\qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\leqslant\ & \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\\
&\limsup_n \int\int |h(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega),v) - h(X^n_{s_1}(\omega),\dots,X^n_{s_l}(\omega),v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
=\ & 0 \ \text{ d'après (2.18)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int h(X^n_{s_1}(\omega),\dots,X^n_{s_l}(\omega),v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad - \int\int h(X_{s_1},\dots,X_{s_l}(\omega),v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
=\ & 0 \ \text{ d'après (2.20)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \int\int |(h(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega),v) - f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v))\\
&\qquad H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\leqslant\ & \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\\
&\limsup_n \int\int |f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) - h(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega),v)|d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\leqslant\ & \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\varepsilon' \ \text{ d'après (2.17)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int f(X^n_{s_1}(\omega),\dots,X^n_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad - \int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ & 2\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon' > 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\int\int f(X^n_{s_1}(\omega),\dots,X^n_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ &\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v).
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.18 est prouvé. □

Lemme 2.2.19 *On a la convergence :*

$$
\begin{aligned}
&\int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ &\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v).
\end{aligned}
$$

Démonstration
$\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}]=\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u]\mathbf{1}_{A_2}$.
Soit $\varepsilon'>0$. $\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u]$ est $\mathcal{F}_u$-mesurable donc il existe $j\in\mathbb{N}$, des instants $v_1<\ldots<v_j\leqslant u$ et $F:\mathbb{R}^j\to\mathbb{R}$ continue bornée telle que :

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u]-F(X_{v_1},\dots,X_{v_j})|]\leqslant\varepsilon'. \tag{2.21}
$$

$X^n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$, F est continue bornée et les v_i sont des points de continuité de X donc

$$
F(X^n_{v_1},\dots,X^n_{v_j})\xrightarrow{L^1}F(X_{v_1},\dots,X_{v_j}). \tag{2.22}
$$

Par le même raisonnement que précédemment, on a :

$$
\begin{aligned}
&\int\int F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ &\int\int F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v).
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&-\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\ldots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&=\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega)\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&-\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\ldots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&\leqslant\Big|\int\int (\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega)-\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\\
&\qquad\quad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad-\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u]\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\ldots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_n\Big|\int\int (\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega)-\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\\
&\qquad\quad H(X^n_{t_1}(\omega),\ldots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ &\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\\
&\qquad\limsup_n\int|\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega)-\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)|d\mathbb{P}(\omega)\\
\leqslant\ &\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\\
&\qquad\limsup_n\int|\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega)-\mathbb{E}[f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)|d\mathbb{P}(\omega)\\
&+\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\\
&\qquad\limsup_n\int|\mathbb{E}[f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)-\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)|d\mathbb{P}(\omega)\\
\leqslant\ &\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\\
&\qquad\limsup_n\int|\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\ldots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega)-\mathbb{E}[f(X_{s_1},\ldots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)|d\mathbb{P}(\omega)\\
&+\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\limsup_n\int|f(X_{s_1}(\omega),\ldots,X_{s_l}(\omega))-f(X^n_{s_1}(\omega),\ldots,X^n_{s_l}(\omega))|d\mathbb{P}(\omega).
\end{aligned}
$$

Comme $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$, d'après la remarque 2 dans Coquet, Mémin et Słomiński [16],

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}].$$

Comme u est un point de continuité de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_\cdot]$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u].$$

f étant bornée, la convergence a lieu dans L^1 :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u]. \tag{2.24}$$

Ainsi, d'après (2.24) et (2.16),

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int (\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega) - \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
&\qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
= {}& 0.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega)) \\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
&\quad -\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u]\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
\leqslant {}& \limsup_n \Big| \int\int (\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega) - F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega)))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
&\qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
&+\limsup_n \Big| \int\int F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega)) \\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
&\quad -\int\int F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
&+\limsup_n \Big| \int\int (F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega)) - \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
&\qquad H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|.
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int (\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega) - F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega)))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
&\qquad H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega))G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
\leqslant\;& \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty \\
&\qquad \limsup_n \int |\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}^n_u](\omega) - F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega))|d\mathbb{P}(\omega) \\
\leqslant\;& \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty \\
&\qquad \limsup_n \int |\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega) - \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega)|d\mathbb{P}(\omega) \\
&+\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty \\
&\qquad \limsup_n \int |\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega) - F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega))|d\mathbb{P}(\omega) \\
&+\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty \\
&\qquad \limsup_n \int |F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega)) - F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega))|d\mathbb{P}(\omega) \\
\leqslant\;& \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\varepsilon' \quad \text{d'après (2.16), (2.21) et (2.22),}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int F(X^n_{v_1}(\omega),\dots,X^n_{v_j}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega)) \\
&\qquad G(\tau^{*,n}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
&\quad -\int\int F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
&\qquad G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
=\;& 0 \quad \text{d'après (2.23),}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \Big| \int\int (F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega)) - \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v) \\
&\qquad H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^{*}(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big| \\
\leqslant\;& \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty \\
&\qquad \limsup_n \int |\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_u](\omega) - F(X_{v_1}(\omega),\dots,X_{v_j}(\omega))|d\mathbb{P}(\omega) \\
\leqslant\;& \|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\varepsilon' \quad \text{d'après (2.21).}
\end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\limsup_n \Bigg| & \int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega)) \\
& \quad G(\tau^{*,n}\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
& - \int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
& \quad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Bigg| \\
\leqslant\ & 2\|H\|_\infty\|G\|_\infty\|g\|_\infty\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon' > 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
& \int\int \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X^n_{t_1}(\omega),\dots,X^n_{t_k}(\omega)) \\
& \quad G(\tau^{*,n}\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
\xrightarrow[n\to+\infty]{} & \int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
& \quad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v).
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.19 est prouvé. □

Comparons maintenant les résultats des lemmes 2.2.18 et 2.2.19.
$H(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_k})$ est $\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}$-mesurable et $G(\tau^n\wedge u)$ et $g(U)$ sont aussi $\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}$-mesurables, par continuité de G et g. Donc,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}]H(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_k})G(\tau^n\wedge u)g(U)] \\
& \quad = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}H(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_k})G(\tau^n\wedge u)g(U)|\mathcal{F}^n_u\times\mathcal{B}]] \\
& \quad = \mathbb{E}[f(X^n_{s_1},\dots,X^n_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}H(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_k})G(\tau^n\wedge u)g(U)]
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite, en utilisant les convergences des lemmes 2.2.18 et 2.2.19, on a alors :

$$\begin{aligned}
& \int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
& \quad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \\
= & \int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)) \\
& \quad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v). \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Reste maintenant à utiliser les différentes approximations pour revenir aux processus initiaux.

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ &\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&-\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)g(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&\text{en utilisant l'égalité (2.25)}\\
\leqslant\ &\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)(\mathbf{1}_A(\omega)-H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)))\\
&\qquad \mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))\\
&\qquad (\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}-G(\tau^*(\omega,v)\wedge u))\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_u\times\mathcal{B}](\omega,v)H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)\\
&\qquad (\mathbf{1}_B(v)-g(v))d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))(\mathbf{1}_A(\omega)-H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega)))\\
&\qquad \mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))(\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}-G(\tau^*(\omega,v)\wedge u))\\
&\qquad \mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))H(X_{t_1}(\omega),\dots,X_{t_k}(\omega))G(\tau^*(\omega,v)\wedge u)\\
&\qquad (\mathbf{1}_B(v)-g(v))d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ & 2\|f\|_\infty(1+\|H\|_\infty+\|G\|_\infty)\varepsilon\ \ \text{d'après (2.13), (2.14) et (2.15).}
\end{aligned}$$

On fait maintenant tendre u vers t par valeurs supérieures. $\mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})|\mathcal{F}_\cdot]$ étant un processus càdlàg, il vient :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ & 2\|f\|_\infty(1+\|H\|_\infty+\|G\|_\infty)\varepsilon. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\int \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int Z(\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ & \Big|\int\int \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int \mathbb{E}[f(X_{s_1},\dots,X_{s_l})\mathbf{1}_{A_2}|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
&+\Big|\int\int f(X_{s_1}(\omega),\dots,X_{s_l}(\omega))\mathbf{1}_{A_2}(v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\\
&\quad -\int\int Z(\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v)\Big|\\
\leqslant\ & 2\|f\|_\infty(1+\|H\|_\infty+\|G\|_\infty)\varepsilon+2\varepsilon \quad \text{d'après (2.12) et (2.26).}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int\int \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}](\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) \qquad (2.27)\\
&\quad = \int\int Z(\omega,v)\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_{\{\tau^*(\omega,v)\leqslant s\}}\mathbf{1}_B(v)d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v),
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,T]$, pour tout $Z=\mathbf{1}_{A_1\times A_2}$, $A_1\in\mathcal{F}_T$, $A_2\in\mathcal{B}$, pour tout $A\in\mathcal{F}_t$, pour tout $s\leqslant t$, pour tout $B\in\mathcal{B}$.

Aussi, pour tout $t\in[0,T]$, pour tout $Z=\mathbf{1}_{A_1\times A_2}$, $A_1\in\mathcal{F}_T$, $A_2\in\mathcal{B}$, pour tout $C\in\mathcal{G}_t\times\mathcal{B}$, l'égalité (2.11) est vraie :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z|\mathcal{F}_t\times\mathcal{B}]\mathbf{1}_C]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z\mathbf{1}_C].$$

Si Z est une indicatrice, on a le résultat d'après la première étape et en utilisant un argument de classe monotone.

Si Z est une fonction étagée, on a le résultat par linéarité.

Si Z est quelconque $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$ mesurable, on utilise la densité en norme L^1 des fonctions étagées.

Ainsi, pour tout $t \in [0,T]$, pour tout $Z \in L^1(\mathcal{F}_T \times \mathcal{B})$, pour tout $C \in \mathcal{G}_t \times \mathcal{B}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z|\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}]\mathbf{1}_C] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mu}[Z\mathbf{1}_C].$$

L'hypothèse du lemme 2.2.17 est vérifiée, donc $\tilde{\Gamma}(L) = \Gamma^*(L)$. De plus, d'après le lemme 2.2.10, $\Gamma^*(L) = \Gamma(L)$. L'inégalité (2.9) se reécrit alors

$$\limsup \Gamma_n(L) \leqslant \Gamma(L).$$

D'où le théorème 2.2.16. □

2.2.4 Conclusion, application aux discrétisés et une extension

Le théorème 2.2.1 découle des théorèmes 2.2.2, 2.2.14 et 2.2.16 et de la remarque 2.2.7.

Application aux discrétisés

Illustrons ce qui précède par le cas des discrétisés.

Proposition 2.2.20 *Soit X un processus quasi continu à gauche et $(\pi^n = \{t_1^n, \dots t_{k^n}^n\})_n$ une suite croissante de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0. Soit $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à la filtration engendrée par X et $(\mathcal{F}^n)_n$ celles engendrées par les $(X^n)_n$. On définit la suite des processus discrétisés $(X^n)_n$ par $\forall n$, $\forall t$, $X_t^n = \sum_{i=1}^{k^n-1} X_{t_i^n}\mathbf{1}_{t_i^n \leqslant t < t_{i+1}^n}$. Alors$\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(L)$ (avec les notations de l'introduction).*

Démonstration
- $X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ *p.s.* donc en probabilité.
- $\forall n, \mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$ par construction des X^n.
- Montrons que le critère d'Aldous (1.2) est vérifié.

Comme X est quasi continu à gauche, X vérifie le critère de tension d'Aldous d'après la proposition 1.1.36. D'autre part, sans perte de généralité, on peut supposer que les temps d'arrêt pour les discrétisés sont à valeurs dans les subdivisions. Il en découle que (X^n) vérifie le critère d'Aldous.
Alors d'après le théorème 2.2.1, $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(L)$. □

Remarque 2.2.21 L'hypothèse faite sur X est minimale. En effet, si on considère un processus X et la suite (X^n) de ses discrétisés suivant une suite de subdivisions de pas tendant vers 0, il y a équivalence entre le fait que X soit quasi continu à gauche et le fait que (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous. Une implication a été prouvée juste au dessus, l'autre découle de la proposition 1.1.38.

Une extension

Théorème 2.2.22 *Soit $(\gamma^n)_n$ une suite de fonctions continues bornées qui converge uniformément vers une fonction continue bornée γ. Soit X un processus càdlàg et $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg. Soit $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à la filtration engendrée par X et $(\mathcal{F}^n)_n$ les filtrations engendrées par les processus $(X^n)_n$. On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, que le critère de tension d'Aldous (1.2) est satisfait et que :*
- ou bien pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$,
- ou bien $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$.
On considère les réduites suivantes :

$$\Gamma(L) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_L} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] \quad et \quad \Gamma_n(L) = \sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[\gamma^n(\tau^n, X^n_{\tau^n})].$$

Alors $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(L)$.

DÉMONSTRATION
D'après le théorème 2.2.1, on a

$$\sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] \to \sup_{\tau \in \mathcal{T}_L} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)].$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[\gamma^n(\tau^n, X^n_{\tau^n})] - \sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] \to 0.$$

Mais,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[\gamma^n(\tau^n, X^n_{\tau^n})] - \sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})] \\
&\leqslant \sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} |\mathbb{E}[\gamma^n(\tau^n, X^n_{\tau^n})] - \mathbb{E}[\gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})]| \\
&\leqslant \sup_{\tau^n \in \mathcal{T}_L^n} \mathbb{E}[|\gamma^n(\tau^n, X^n_{\tau^n}) - \gamma(\tau^n, X^n_{\tau^n})|] \\
&\leqslant \sup_{t,x} |\gamma^n(t,x) - \gamma(t,x)| \\
&\to 0 \text{ avec l'hypothèse de convergence uniforme.}
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Cette extension servira dans l'application en finance de la section 2.4.

2.3 Convergence des temps d'arrêt optimaux

Dans le cas où on a convergence des valeurs optimales $\Gamma_n(L)$ associées à une suite $(X^n)_n$ vers la valeur optimale $\Gamma(L)$ associée à un processus X, il est naturel de s'intéresser à la convergence des temps d'arrêt optimaux correspondants.

On considère la situation suivante. Soit $(X^n)_n$ une suite de processus càdlàg qui converge en probabilité vers un processus càdlàg X. On suppose que la suite (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2). Soit $(\mathcal{F}^n)_n$ et $\mathcal{F}^X$ les filtrations engendrées par ces processus et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à $\mathcal{F}^X$. On suppose que $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(L)$.

2.3.1 Existence de temps d'arrêt optimaux

Définition 2.3.1 *τ est un temps d'arrêt optimal associé à la réduite d'ordre L de X si τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt borné par L tel que $\mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] = \Gamma(L)$.*

Il existe dans la littérature des résultats sur l'existence de temps d'arrêt optimaux. On citera notamment l'article de Mucci [43] ainsi que le livre de Shiryaev [56]. Dans ces deux références, les auteurs montrent l'existence de temps d'arrêt optimaux pour des processus de Markov. Dans [43], Mucci montre que, sous certaines conditions, le temps d'arrêt optimal peut s'écrire explicitement comme le temps d'entrée dans un fermé.

Voyons un résultat d'existence de temps d'arrêt optimal basé sur une inclusion de filtrations.

Proposition 2.3.2 *On suppose que $X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Si pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$ et s'il existe une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt optimaux, alors il existe au moins un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt optimal.*

Démonstration
Soit (τ^n_{op}) une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt optimaux. On considère, comme en 2.2.2, la suite de temps d'arrêt randomisés associée $(\tau^{*,n}_{op})_n$. Comme pour tout n, $\mathcal{F}^n \subset \mathcal{F}$, $(\tau^{*,n}_{op})_n$ est une suite de $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisés. $\mathcal{F}$ est continue à droite donc, d'après le théorème 1.5 dans Baxter et Chacon [6], il existe une sous-suite qui converge vers un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt randomisé τ^* : $\tau^{*,\varphi(n)}_{op} \xrightarrow{BC} \tau^*$.
$X^n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $\tau^{*,\varphi(n)}_{op} \xrightarrow{BC} \tau^*$, donc d'après les propositions 2.2.11 et 2.2.13,

$$(\tau^{*,\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{*,\varphi(n)}_{op}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\tau^*, X_{\tau^*}).$$

Alors, comme γ est continue bornée,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^{*,\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{*,\varphi(n)}_{op}})] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})].$$

De plus, (τ^n_{op}) est un suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt optimaux. Aussi

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^{*,\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{*,\varphi(n)}_{op}})] = \mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}_{op}})] = \Gamma_{\varphi(n)}(L).$$

D'autre part, d'après le théorème 2.2.1, $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(L)$. Par unicité de la limite, on a alors

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^*, X_{\tau^*})] = \Gamma(L).$$

Comme on l'a montré dans la démonstration du lemme 2.2.10, pour tout $v \in [0,1]$, τ_v est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. De plus,

$$\Gamma(L) = \int_{\Omega\times[0,1]} \gamma(\tau^*(\omega,v), X_{\tau^*}(\omega,v))d(\mathbb{P}\otimes\mu)(\omega,v) = \int_0^1 \mathbb{E}[\gamma(\tau_v, X_{\tau_v})]dv.$$

Mais, pour tout v, $\mathbb{E}[\gamma(\tau_v, X_{\tau_v})] \leqslant \Gamma(L)$.
$\Gamma(L) - \mathbb{E}[\gamma(\tau_v, X_{\tau_v})] \geqslant 0$ et $\int_0^1 (\Gamma(L) - \mathbb{E}[\gamma(\tau_v, X_{\tau_v})])dv = 0$. Donc, pour presque tout v, $\mathbb{E}[\gamma(\tau_v, X_{\tau_v})] = \Gamma(L)$. □

2.3.2 Convergence de suite de temps d'arrêt optimaux

On suppose qu'il existe une suite $(\tau^n_{op})_n$ de temps d'arrêt optimaux associée aux X^n.

$(\tau^n_{op})_n$ est tendue donc il existe une sous-suite $(\tau^{\varphi(n)}_{op})_n$ qui converge en loi vers une variable aléatoire τ.

Deux problèmes se posent :
- τ est-il un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt ?
- si oui, est-il optimal pour X, *i.e.* a-t-on $\mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] = \Gamma(L)$?

Lemme 2.3.3 *On suppose que* $\Gamma_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(L)$. *Soit* $(\tau^n_{op})_n$ *une suite de temps d'arrêt optimaux associée aux* X^n. *On suppose qu'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante et une variable aléatoire* τ *telles que* $((X^{\varphi(n)}, \tau^{\varphi(n)}_{op}))_n$ *converge en loi vers* (X,τ). *On suppose que* τ *est un* $\mathcal{F}$*-temps d'arrêt. Alors* τ *est un* $\mathcal{F}$*-temps d'arrêt optimal.*

Démonstration
$(X^{\varphi(n)}, \tau^{\varphi(n)}_{op}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X,\tau)$ et (X^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2), donc d'après la proposition 1.1.34,

$$(\tau^{\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}_{op}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\tau, X_\tau).$$

Alors, comme γ est continue bornée,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}_{op}})] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)].$$

$(\tau^{\varphi(n)}_{op})$ est une suite de $(\mathcal{F}^{\varphi(n)})$-temps d'arrêt optimaux, donc pour tout n,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau^{\varphi(n)}_{op}, X^{\varphi(n)}_{\tau^{\varphi(n)}_{op}})] = \Gamma_{\varphi(n)}(L)$$

où $\Gamma_{\varphi(n)}(L)$ est la réduite d'horizon L associée au processus $X^{\varphi(n)}$.
De plus, $\Gamma_{\varphi(n)}(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(L)$.
Donc, par unicité de la limite,

$$\mathbb{E}[\gamma(\tau, X_\tau)] = \Gamma(L).$$

Finalement, τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt optimal. □

Grâce à ce lemme, le problème se réduit à trouver des conditions pour que la limite d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt soit un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Dans la partie 1.2.2, on a vu un critère, sous hypothèse de convergence de filtrations et d'inclusion des tribus terminales, pour qu'une limite en probabilité d'une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt soit un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. Grâce à ce résultat, on obtient le théorème suivant de convergence de temps d'arrêt optimaux.

Théorème 2.3.4 *Soit (X^n) une suite de processus càdlàg qui converge en loi vers un processus quasi continu à gauche X. On suppose que les (X^n) sont des processus à accroissements indépendants. Soit $(\mathcal{F}^n)_n$ et $\mathcal{F}^X$ les filtrations engendrées par ces processus et $\mathcal{F}$ la filtration continue à droite associée à $\mathcal{F}^X$. Soit (τ^n) une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt optimaux. Alors, si (X, τ) est une valeur d'adhérence de $((X^n, \tau^n))_n$ telle que τ soit $\mathcal{F}_T$-mesurable, τ est un temps d'arrêt optimal pour X.*

DÉMONSTRATION
(τ^n) est bornée donc tendue. On sait que $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, donc (X^n) est tendue. Alors $((X^{\varphi(n)}, \tau^{\varphi(n)}))$ est tendue. On peut donc extraire une sous-suite $((X^{\varphi(n)}, \tau^{\varphi(n)}))$ qui converge en loi vers (X, τ).

Montrons que τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.
D'après le théorème de représentation de Skorokhod, il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathbb{P}})$ ainsi que $(\tilde{X}^{\varphi(n)}, \tilde{\tau}^{\varphi(n)})$ de même loi que $(X^{\varphi(n)}, \tau^{\varphi(n)})$ et $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ de même loi que (X, τ) tels que

$$(\tilde{X}^{\varphi(n)}, \tilde{\tau}^{\varphi(n)}) \xrightarrow{p.s} (\tilde{X}, \tilde{\tau}) \text{ dans } (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathbb{P}}).$$

Comme les (X^n) sont des processus à accroissements indépendants, les $(\tilde{X}^{\varphi(n)})$ le sont aussi. D'après la proposition 3 dans Mémin [41], on a la convergence étendue en probabilité

$$(\tilde{X}^{\varphi(n)}, \mathcal{F}^{\tilde{X}^{\varphi(n)}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (\tilde{X}, \mathcal{F}^{\tilde{X}})$$

où $\mathcal{F}^{\tilde{X}^{\varphi(n)}}$ (resp. $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$) est la filtration engendrée par $\tilde{X}^{\varphi(n)}$ (resp. $\tilde{X}$). Cette convergence avait déjà été montrée en loi (et pas en probabilité) par Aldous dans la proposition 20.18 dans [2]. La preuve d'Aldous utilise les processus de prédiction alors que celle de Mémin utilise des arguments de convergence de filtrations.
D'autre part, τ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Il existe donc f mesurable telle que $\tau = f(X)$. $(\tilde{X}, \tilde{\tau}) \sim (X, \tau)$ et $(X, \tau) = (X, f(X))$, donc $\tilde{\tau} = f(\tilde{X})$ *p.s.* Aussi, $\tilde{\tau}$ est $\mathcal{F}_T^{\tilde{X}}$-mesurable. Enfin, $\tilde{\tau}^{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s.} \tilde{\tau}$ par construction et, comme $(\tau^{\varphi(n)})$ est une suite de $(\mathcal{F}^{\varphi(n)})$-temps d'arrêt, $(\tilde{\tau}^{\varphi(n)})$ est une suite de $(\mathcal{F}^{\tilde{X}^{\varphi(n)}})$-temps d'arrêt.
Alors, d'après la proposition 1.2.5, $\tilde{\tau}$ est un $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$-temps d'arrêt.
D'autre part, on a la convergence étendue de $(\tilde{X}^{\varphi(n)}, \mathcal{F}^{\tilde{X}^{\varphi(n)}})$ vers $(\tilde{X}, \mathcal{F}^{\tilde{X}})$ et $\tilde{X}$ est quasi continu à gauche, donc d'après la proposition 1.1.39, $(\tilde{X}^{\varphi(n)})$ vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2).
De plus, $\tilde{X}^{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s.} \tilde{X}$ et $\mathcal{F}^{\tilde{X}^{\varphi(n)}} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^{\tilde{X}}$, donc d'après le théorème 2.2.1, on a la convergence $\Gamma^{\tilde{X}^{\varphi(n)}}(L) \to \Gamma^{\tilde{X}}(L)$.
Alors, d'après le lemme 2.3.3, $\tilde{\tau}$ est un $\mathcal{F}^{\tilde{X}}$-temps d'arrêt optimal.
Finalement, τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt optimal d'après le lemme 1.1.21. □

2.4 Application en finance

Nous allons montrer que les réduites et les temps d'arrêt optimaux associés aux modèles de Cox, Ross et Rubinstein convergent vers ceux associés au modèle de Black et Scholes. Pour cela, nous allons être amenés à approcher le mouvement brownien par une suite de marches aléatoires et utiliserons les résultats de la partie 1.3.2.

Le résultat de convergence des réduites n'est pas nouveau. Il a déjà été obtenu par Lamberton et Pagès dans [37] ainsi que Mulicani et Pratelli dans [44], par exemple. En revanche, le résultat sur les convergences de temps d'arrêt optimaux associés à ces modèles diffère des résultats existants sur le sujet. En effet, dans la proposition 2.4.5, on donnera un critère pour que la limite d'une suite de temps d'arrêt optimaux pour les modèles de Cox-Ross-Rubinstein soit un temps d'arrêt optimal pour le modèle de Black et Scholes. Dans [44], [37] ou Lamberton [35], les différents auteurs montrent que la limite en loi d'une suite de temps d'arrêt optimaux pour les modèles de Cox-Ross-Rubinstein a la loi d'une variable aléatoire optimale pour le modèle de Black-Scholes, mais pas nécessairement un temps d'arrêt pour la filtration sous-jacente.

2.4.1 Présentation des modèles

Pour une étude complète des modèles utilisés dans cette partie, on pourra se référer au livre de Lamberton et Lapeyre [36], à celui de Shiryaev [57] ou aux articles originaux de Black et Scholes [8] et de Cox, Ross et Rubinstein [17].

Le modèle de Black et Scholes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, (B_t) un mouvement brownien standard et $\mathcal{F}$ la filtration qu'il engendre.

On considère un marché qui comporte un actif risqué de prix S_t à l'instant t et un actif sans risque de prix S_t^0 à l'instant t. On suppose que l'évolution du cours de l'actif risqué satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

où μ et σ sont deux constantes. On suppose également que S_t^0 évolue de la façon suivante : $S_t^0 = S_0^0 e^{-rt}$ où r représente le taux d'intérêt ($r > 0$).

Afin de ne pas tenir compte de la « dévaluation de la monnaie », on considère les prix actualisés définis par $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}$. L'évolution du prix actualisé de l'actif risqué suit alors l'équation suivante :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(\lambda dt + \sigma dB_t)$$

où $\lambda = \mu - r$.

D'autre part, d'après le théorème de Girsanov, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que, sous $\mathbb{P}^*$, $\tilde{S}$ est une $\mathcal{F}$-martingale. Sous $\mathbb{P}^*$, l'équation d'évolution de $\tilde{S}$ se réécrit de la façon suivante :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dB^*_t$$

où $B^*_t = B_t + \frac{\lambda}{\sigma} t$ est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{P}^*$.

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Il est classique d'approcher le modèle de Black et Scholes par une suite de modèles de Cox-Ross-Rubinstein.

Pour tout n, on considère la suite $(Y_i^n)_i$ construite par la méthode de Knight dans la section 1.3.2. Pour tout n, $(Y_i^n)_i$ est une suite de variables de Bernoulli indépendantes telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}[Y_i^n = 1] = \mathbb{P}[Y_i^n = -1] = 1/2$. On note $(\mathcal{F}^n)$ la suite de filtrations constantes sur les intervalles $[kT/n, (k+1)T/n[$ telles que pour tout k, $\mathcal{F}^n_k = \sigma(Y_i^n, i \leqslant k)$.

On considère ensuite les suites (a_n), (b_n) et (r_n) définies par les relations suivantes :

$$r_n = \frac{rT}{n},\ a_n = \left(1 + \frac{(\mu + \sigma^2/2)T}{n}\right) e^{-\sigma\sqrt{T/n}} - 1 \quad \text{et} \quad b_n = \left(1 + \frac{(\mu + \sigma^2/2)T}{n}\right) e^{\sigma\sqrt{T/n}} - 1.$$

À partir de ces suites, on définit les modèles de Cox-Ross-Rubinstein constitués d'un actif risqué de prix S^n et d'un actif sans risque de prix $S^{0,n}$ qui évoluent de la façon suivante : pour tout n, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} S^n_{(k+1)T/n} &= S^n_{kT/n}\left(1 + \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{b_n - a_n}{2} Y^n_k\right) \\ S^{0,n}_{kT/n} &= (1 + r_n)^k. \end{aligned}$$

L'équation d'évolution du prix actualisé $\tilde{S}^n$ de l'actif risqué est alors :

$$\tilde{S}^n_{(k+1)T/n} = \tilde{S}^n_{kT/n}(1 + r_n)^{-1}\left(1 + \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{b_n - a_n}{2} Y^n_k\right).$$

Pour tout n, on définit la probabilité $\mathbb{P}^{*,n}$ de la façon suivante :

$$\mathbb{P}^{*,n}[Y^n_k = 1] = 1 - \mathbb{P}^{*,n}[Y^n_k = -1] = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}.$$

$\mathbb{P}^{*,n}$ ainsi définie est l'unique probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ telle que, sous $\mathbb{P}^{*,n}$, $\tilde{S}^n$ est une $\mathcal{F}^n$-martingale.

2.4.2 Propriétés de convergence

Par construction des suites (a_n), (b_n) et (r_n) et puisque les variables de Bernoulli sont construites avec la méthode de Knight, on a $\tilde{S}^n \xrightarrow{p.s.} \tilde{S}$.

On s'intéresse maintenant au prix d'une option européenne d'achat d'échéance T pour un prix d'exercice K. Notant C_t^n le prix du call à l'instant t pour les modèles de Cox-Ross-Rubinstein et C_t celui donné par le modèle de Black-Scholes, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} C^n_{kT/n} &= (1+r_n)^{-(n-k)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n,*}}[(S^n_T-K)^+|\mathcal{F}^n_{kT/n}], \\ C_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.1 $C^n \xrightarrow{\mathbb{P}} C$.

DÉMONSTRATION
On pose

$$B^n_{kT/n} = \sqrt{\frac{T}{n}}\sum_{i=1}^{k} Y_i^n, k = 0,\dots,n.$$

On prolonge B^n à $[0,T]$ en posant $B^n_t = B^n_{kT/n}$ si $t \in [kT/n,(k+1)T/n[$. Par construction, $B^n \xrightarrow{p.s.} B$. B est un PAI donc $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$ d'après la proposition 2 dans [16].
De plus, on a $(S^n_T-K)^+ \xrightarrow{L^1} (S_T-K)^+$.
Alors, d'après la remarque 1.2 dans [16],

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n,*}}[(S^n_T-K)^+|\mathcal{F}^n] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}_{P^*}[(S_T-K)^+|\mathcal{F}].$$

D'autre part, par choix de (r_n),

$$(1+r_n)^{-(n-[.n/T])} \to e^{-r(T-.)}.$$

Aussi, on a la convergence $C^n \xrightarrow{\mathbb{P}} C$. □

Remarque 2.4.2 Ici, on a une convergence en probabilité des prix des calls car les marches aléatoires ont été construites par la méthode de Knight. Dans le cas où on a seulement convergence en loi de (B^n) vers B grâce au théorème de Donsker, on obtient une convergence en loi des calls.

2.4.3 Cas des options américaines

Dans cette partie, on s'intéresse au prix d'une option américaine de vente d'échéance T pour un prix d'exercice K. L'espérance maximale de gain est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma^{S^n}(T) &= \sup_{\tau^n\in\mathcal{T}^n_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n,*}}[(1+r_n)^{-[\tau^n n/T]}(K-S^n_{\tau^n})^+] \text{ dans le cas des modèles de CRR,} \\ \Gamma^S(T) &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_T} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{-r\tau}(K-S_\tau)^+] \text{ dans le cas du modèle de BS.} \end{aligned}$$

Le problème est alors de savoir si on a convergence de la suite de réduites $(\Gamma^{S^n}(T))$ vers $\Gamma^S(T)$ et, si oui, si on a convergence des temps d'arrêt optimaux associés.

Convergence des réduites

D'après la proposition 1.3.6, $B^n \xrightarrow{p.s.} B$. On a également $S^n \xrightarrow{p.s.} S$. Ainsi, comme B est continu,

$$(B^n, S^n) \xrightarrow{p.s.} (B, S).$$

Or, pour tout t, S^n_t est une fonction continue bijective de B^n_t. Par conséquent, S^n et B^n engendrent la même filtration $\mathcal{F}^{S^n} = \mathcal{F}^{B^n}$. De même, S et B engendrent la même filtration $\mathcal{F}^S = \mathcal{F}^B$.

(B^n) est une suite de processus à accroissements indépendants et $B^n \xrightarrow{\mathbb{P}} B$. Alors, d'après la proposition 3 de Mémin dans [41], $(B^n, \mathcal{F}^{B^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (B, \mathcal{F}^B)$. Mais, $\mathcal{F}^{S^n} = \mathcal{F}^{B^n}$, $\mathcal{F}^S = \mathcal{F}^B$, et S^n et S sont des bijections continues de B^n et B. Aussi, $(S^n, \mathcal{F}^{S^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} (S, \mathcal{F}^S)$. De plus, S est quasi continu à gauche. Alors, d'après la proposition 1.1.39, (S^n) vérifie le critère de tension d'Aldous (1.2).

$S^n \xrightarrow{\mathbb{P}} S$, $\mathcal{F}^{S^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^S$, S est continu, (S^n) vérifie le critère d'Aldous et $((1 + r_n)^{-[n./T]})_n$ converge uniformément vers $e^{-r.}$, donc d'après le théorème 2.2.22, on a

$$\Gamma^{S^n}(T) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma^S(T).$$

On a donc le résultat suivant :

Proposition 2.4.3 *Les réduites associées au modèle de Cox-Ross-Rubinstein convergent vers celles associées au modèle de Black et Scholes :*

$$\Gamma^{S^n}(T) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma^S(T).$$

Remarque 2.4.4 La proposition 2.4.3 reste vraie même si B^n n'est pas obtenu par la méthode de Knight. Dans ce cas, (B^n, S^n) converge en loi vers (B, S). Grâce au théorème de représentation de Skorokhod, on se ramène à une convergence presque sûre et on conclut avec la remarque 2.1.1 qui indique que la valeur de la réduite ne dépend que de la loi des processus considérés.

Convergence des temps d'arrêt optimaux

Nous allons maintenant utiliser ce résultat pour prouver la convergence des temps d'arrêt optimaux du modèle de Cox-Ross-Rubinstein vers ceux du modèle de Black-Scholes.

S^n est une fonction continue de B^n, processus à accroissements indépendants. Aussi S^n est un processus de Markov, comme fonction continue d'un processus de Markov. Il existe donc une suite (τ^n_{op}) de $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt optimaux.

Précédemment, on a vu que $((B^n, S^n))_n$ converge presque sûrement vers (B, S). De plus, $(\tau^n_{op})_n$ est bornée donc tendue. Ainsi, $((B, B^n, S^n, \tau^n_{op}))_n$ est tendue. On peut donc extraire une sous-suite convergente que l'on notera encore $((B, B^n, S^n, \tau^n_{op}))_n$:

$$(B, B^n, S^n, \tau^n_{op}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (B, B, S, \tau).$$

Montrons que τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.
D'après le théorème de représentation de Skorokhod, il existe (X, X^n, Y^n, V^n) de même loi que $(B, B^n, S^n, \tau^n_{op})$ et (X, X, Y, V) de même loi que (B, B, S, τ) tels que l'on ait la convergence $(X, X^n, Y^n, V^n) \xrightarrow{p.s.} (X, X, Y, V)$.
A l'aide de la proposition 1.2.5, on va montrer que V est un $\mathcal{F}^Y$-temps d'arrêt. On va donc prouver successivement que $\mathcal{F}^{Y^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^Y$ et que V est $\mathcal{F}^Y_T$-mesurable.

Montrons tout d'abord la convergence des filtrations.
B^n est un processus à accroissements indépendants, donc X^n l'est aussi. De plus, $X^n \xrightarrow{p.s.} X$. Alors, d'après la proposition 2 dans Coquet, Mémin et Słomiński [16], $\mathcal{F}^{X^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^X$. D'autre part, S^n déterminé de façon unique à partir de B^n et (X^n, Y^n) a même loi que (B^n, S^n), donc Y^n est une bijection de X^n. Par conséquent, Y^n et X^n engendrent la même filtration. De même, Y et X engendrent la même filtration. Ainsi,

$$\mathcal{F}^{Y^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^Y.$$

Montrons maintenant la propriété de mesurabilité de V. On va en fait montrer que τ est $\mathcal{F}_T$-mesurable, ce qui donnera le résultat cherché.
Pour tout n, B^n est $\mathcal{F}_T$-mesurable d'après la proposition 1.3.6. S^n est une fonction continue de B^n, donc S^n est aussi $\mathcal{F}_T$-mesurable. Enfin, pour tout n, τ^n_{op} est une fontion mesurable de S^n. Donc, pour tout n, τ^n_{op} est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Par conséquent, τ est $\mathcal{F}_T$-mesurable comme limite de variables aléatoires $\mathcal{F}_T$-mesurables.

Alors d'après la proposition 1.2.5, V est un $\mathcal{F}^Y$-temps d'arrêt.
De plus, d'après la proposition 2.4.3, $\Gamma^{S^n}(T) \to \Gamma^S(T)$. Aussi, d'après le lemme 2.3.3, τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt optimal.
On vient de montrer le résultat suivant :

Proposition 2.4.5 *Il existe une suite de temps d'arrêt optimaux associée au modèle de Cox-Ross-Rubinstein qui converge en loi vers un temps d'arrêt optimal pour le modèle de Black-Scholes. Plus précisément, si (B, S, τ) est une valeur d'adhérence (en loi) de la suite $((B^n, S^n, \tau^n_{op}))_n$ où $(\tau^n_{op})_n$ est une suite de temps d'arrêt optimaux pour le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, alors τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt optimal pour le modèle de Black-Scholes.*

Remarque 2.4.6 On a vu que la proposition 2.4.3 reste vraie quelle que soit la suite $(Y^n_i)_i$ de variables de Bernoulli indépendantes considérées. En revanche, pour prouver la proposition 2.4.5, on utilise le fait que les Y^n_i sont $\mathcal{F}_T$-mesurables ce qui permet ensuite de montrer que τ est $\mathcal{F}_T$-mesurable. La mesurabilité des Y^n_i découle de leur construction qui est donc ici fondamentale.

Chapitre 3

Stabilité de solutions d'EDSR à horizon aléatoire

3.1 Introduction

La théorie des Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR) à horizon aléatoire déterministe fini T du type

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \tag{3.1}$$

a été introduite en 1990 par Pardoux et Peng dans [47]. Depuis, de nombreuses études ont été menées pour trouver des résultats d'existence et d'unicité des solutions en minimisant les hypothèses sur le générateur f et la condition terminale ξ.

Plusieurs travaux sur la robustesse des schémas d'approximation numérique ont également été faits avec des approches très différentes. Citons quelques exemples de ces travaux. Antonelli et Kohatsu-Higa dans [5] et Coquet, Mackevičius et Mémin dans [14] et [13] se sont intéressés à la convergence de la solution V^n de l'EDSR

$$V_t^n = \mathbb{E}\left[\int_0^T g_s^n(V_s^n)dA_s^n + X^n \middle| \mathcal{F}_t^n\right] - \int_0^t g_s^n(V_s^n)dA_s^n$$

vers la solution V de l'EDSR

$$V_t = \mathbb{E}\left[\int_0^T g_s(V_s)dA_s + X \middle| \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t g_s(V_s)dA_s.$$

L'argument principal des preuves de Coquet, Mackevičius et Mémin est la convergence des filtrations. D'autre part, Briand, Delyon et Mémin dans [10] et Ma, Protter, San Martín et Torres dans [38] ont étudié des cas où le mouvement brownien d'une équation du type (3.1) est approché par une marche aléatoire. On citera également l'article [11] de Briand, Delyon et Mémin qui généralise le précédent [10] car cette fois le mouvement brownien est approché par une suite de martingales. Ma, Protter et Yong ont une approche radicalement différente dans [39]. Ils indiquent un schéma de résolution d'EDSR

« en quatre temps » qui est basé sur les liens entre EDSR à horizon déterministe fini et Équations aux Dérivées Partielles (EDP) de type parabolique (cf Pardoux et Peng [48] et Pardoux, Pradeilles et Rao [49] par exemple).

On s'est ensuite intéressé aux EDSR à horizon aléatoire du type

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau} &= Y_{r\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{r\wedge\tau} f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{r\wedge\tau} Z_s dW_s,\ t \geqslant 0,\ r \geqslant t, \\ Y_\tau &= \xi \text{ sur } \{\tau < +\infty\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

notamment pour leurs liens avec les EDP de type elliptique (cf Peng [50] par exemple). Des études ont alors été faites concernant les résultats d'existence et d'unicité des solutions de ces équations. On citera les travaux de Pardoux dans [46] en dimension quelconque, et, dans le cas de la dimension 1 uniquement, ceux de Briand et Hu dans [12] et de Manuela Royer dans sa thèse [54].

Comme dans le cas des EDSR à horizon déterministe, on va maintenant étudier la stabilité de solutions d'EDSR à horizon aléatoire presque sûrement fini du type (3.2). Pour cela, on va approcher le mouvement brownien W soit par une marche aléatoire, soit par une suite de martingales. Dans notre étude, nous serons aussi amenés à approcher le temps d'arrêt τ par une suite de temps d'arrêt $(\tau^n)_n$.

Dans la partie 3.2, on va approcher le mouvement brownien par une marche aléatoire. On posera tout d'abord le problème étudié, puis on prouvera l'existence et l'unicité des solutions des EDSR étudiées. Ensuite, on s'intéressera à la convergence des solutions. Pour finir cette partie, on donnera un exemple du résultat de convergence dans le cas de temps d'entrée dans des ouverts.

Dans la partie 3.3, on va approcher le mouvement brownien par une suite de martingales. On va en fait généraliser les résultats de la partie 3.2 : existence et unicité des solutions des EDSR étudiées, convergence des solutions. On illustrera ensuite ces résultats par le cas des discrétisés du mouvement brownien et de temps d'entrée dans des ouverts.

3.2 Approximation du mouvement brownien par une marche aléatoire

3.2.1 Problème étudié

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que f est γ-lipschitzienne en y et z, *i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $(y,z),(y',z') \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leqslant \gamma[|y-y'| + |z-z'|],$$

f est monotone en y au sens où il existe $\mu > 0$ tel que

$$\forall (t,y,z),(t,y',z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, (y-y')(f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leqslant -\mu(y-y')^2,$$

f est bornée et $\{f(t,y,z)\}_{t\geqslant 0}$ est progressivement mesurable pour tout (y,z).

Soit W un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ la filtration qu'il engendre, τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt fini presque sûrement et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable bornée presque sûrement.

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante :

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_s dW_s, \ \forall t \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Nous allons d'abord nous intéresser à l'existence et l'unicité des solutions de cette équation.

Définition 3.2.1 *On appelle solution de l'EDSR (3.3) un couple (Y,Z) de processus progressivement mesurables vérifiant l'équation (3.3) et tel que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geqslant 0} e^{-2\mu t}|Y_t|^2\right] < +\infty \ \textit{et}\ \forall t,\ \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} |Z_t|^2 dt\right] < +\infty$$

et sur l'ensemble $\{t \geqslant \tau\}$, on a $Y_t = \xi$ et $Z_t = 0$.

D'après le lemme 3.1 de Briand et Hu dans [12], l'EDSR (3.3) admet un unique couple solution (Y,Z) dans la classe des processus tels que Y est continu et uniformément borné.

Voici une propriété de bornitude connue des solutions qui sera utilisée par la suite :

Proposition 3.2.2 *Y est presque sûrement borné par $\|\xi\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\mu}$.*

DÉMONSTRATION
On raisonne comme Briand et Hu dans [12]. Soit $\theta \geqslant 0$. On définit les processus suivants :

$$\alpha_s = \begin{cases} \frac{f(s,Y_s,Z_s)-f(s,0,Z_s)}{Y_s} & \text{si } Y_s \neq 0 \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad R_t = exp\left(\int_{\theta\wedge\tau}^{t} \alpha_s ds\right).$$

La formule d'Itô appliquée à R_tY_t donne

$$\begin{aligned} d(R_tY_t) &= \alpha_t R_t Y_t dt + R_t\left(-\left(\alpha_t Y_t + f(t,0,Z_t)\right)dt + Z_t dW_t\right) \\ &= -f(t,0,Z_t)R_t dt + Z_t R_t dW_t. \end{aligned}$$

En intégrant entre $\theta\wedge\tau$ et τ et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}$, il vient :

$$\begin{aligned} |Y_{\tau\wedge\theta}| &= |\mathbb{E}[Y_{\tau\wedge\theta}|\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}]| = |\mathbb{E}[R_{\tau\wedge\theta}Y_{\tau\wedge\theta}|\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}]| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[R_\tau Y_\tau + \int_{\theta\wedge\tau}^{\tau} f(t,0,Z_t)R_t dt \middle| \mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}\right]\right| \quad \text{par propriété de martingale} \\ &\leqslant \mathbb{E}[|R_\tau Y_\tau|\ |\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}] + \mathbb{E}\left[\int_{\theta\wedge\tau}^{\tau} |f(t,0,Z_t)R_t| dt \middle| \mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}\right]. \end{aligned}$$

Or, par construction, pour tout t, $R_t \leqslant e^{-\mu(t-\theta\wedge\tau)}$. Ainsi, en particulier, $R_\tau \leqslant 1$ et $\int_{\theta\wedge\tau}^{\tau} |f(t,0,Z_t)R_t|dt \leqslant \|f\|_\infty e^{\mu(\theta\wedge\tau)} \int_{\theta\wedge\tau}^{\tau} e^{-\mu t}dt \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\mu}$. Finalement, on a donc

$$\sup_{t\geqslant 0} |Y_t| \leqslant \|\xi\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\mu}.$$

□

On va approcher l'équation (3.3) de la manière suivante.
On considère la suite de marches aléatoires (W^n) définie par

$$W_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} \varepsilon_k^n, \ t \geqslant 0$$

où $(\varepsilon_k^n)_k$ est une suite de variables de Bernoulli symétriques indépendantes. Soit $(\mathcal{F}^n)$ les filtrations engendrées par les W^n. On a $\mathcal{F}_t^n = \sigma(\varepsilon_k^n, k \leqslant [nt])$. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt tels que pour tout n, $\tau^n \leqslant n$ *p.s.*

Ensuite, pour tout n, on considère l'équation suivante :

$$\begin{cases} y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n} = y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n} + \frac{1}{n}\mathbf{1}_{\{\tau^n \geqslant \frac{k}{n}\}} f\left(\frac{k}{n}, y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}, z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\right) - z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^n_{k+1}, \\ \qquad\qquad k = 0,\dots,n^2-1, \\ y^n_{\tau^n} = \xi^n \end{cases} \tag{3.4}$$

où (ξ^n) est une suite de variables aléatoires intégrables $(\mathcal{F}^n_{\tau^n})$-mesurables.

On appelle solution de l'équation (3.4) le processus discret $\{y^n_{\frac{k}{n}}, z^n_{\frac{k+1}{n}}\}_{k\geqslant 0}$ qui vérifie l'équation (3.4), tel que $y^n_{\frac{k}{n}} = \xi^n$ et $z^n_{\frac{k}{n}} = 0$ sur l'ensemble $\{\tau^n < \frac{k}{n}\}$ et tel que $\{y^n_{\frac{k}{n}}, z^n_{\frac{k+1}{n}}\}_{k\geqslant 0}$ soit $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$-adapté.

Proposition 3.2.3 *L'équation (3.4) a une unique solution* (y^n, z^n).

Démonstration
On va contruire cette solution à l'aide d'une récurrence décroissante.
Pour $k = n^2$, on pose $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n} = \xi^n$ et $z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n} = 0$.
Supposons maintenant que, pour k donné, on a construit $\left(y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}, z^n_{\frac{k+2}{n}\wedge\tau^n}\right)$.
En utilisant l'équation (3.4), on va déterminer $\left(y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}, z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\right)$.

Commençons par donner une expression de $z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}$.
En multipliant l'équation (3.4) par $\sqrt{n}\varepsilon^n_{k+1}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}$ et en prenant l'espérance condi-

tionnelle par rapport à $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{k/n}$, on a :

$$\begin{aligned}
& z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}} \\
&= \mathbb{E}\left[z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}\middle|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}\right] \\
&= \sqrt{n}\mathbb{E}\left[y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\varepsilon^n_{k+1}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}\middle|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}\right]+\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}f\left(\frac{k}{n},y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n},z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\right)\varepsilon^n_{k+1}\middle|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}\right] \\
&\quad -\sqrt{n}\mathbb{E}\left[y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}\varepsilon^n_{k+1}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}\middle|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}\right] \\
&= \sqrt{n}\mathbb{E}\left[y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\varepsilon^n_{k+1}\middle|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}\right]\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}
\end{aligned}$$

car $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}$ et $z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}$ sont $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}$-mesurables, τ^n est un $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt et ε^n_{k+1} est indépendant de $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{k}{n}}$ et centré.
De plus, par définition d'une solution, pour tout k, $z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}=z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}$. On pose alors :

$$z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}=\sqrt{n}\mathbb{E}\left[y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\varepsilon^n_{k+1}\middle|\mathcal{F}^n_{\frac{k}{n}}\right]\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}}.$$

On remarque que $z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}$ ainsi construite est $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{k/n}$-mesurable.

On va maintenant déterminer $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}$.
Sur l'ensemble $\{\tau^n<\frac{k}{n}\}$, $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}=y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}=y^n_{\tau^n}=\xi^n$.
Sur $\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}$, $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}=y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n},y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n},z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\right)-z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^n_{k+1}$ que l'on peut écrire

$$y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}=\varphi\left(y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}\right)$$

avec $\varphi(y)=y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n},y,z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\right)-z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^n_{k+1}$.
Comme f est K-Lipschitzienne en y, on a pour tout y,y' :

$$|\varphi(y)-\varphi(y')|\leqslant\frac{K}{n}|y-y'|.$$

Aussi, pour n assez grand (notons que ce rang ne dépend pas de k), $\frac{K}{n}<1$ et φ est une contraction. Alors, l'équation $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}=\varphi\left(y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}\right)$ a une unique solution pour n assez grand, en utilisant un théorème de point fixe. Par construction, $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}$ est $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{(k+1)/n}$-mesurable. De plus, comme W^n a la propriété de représentation prévisible, $y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}-z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^n_{k+1}=\mathbb{E}[y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{k/n}]$. Aussi $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}$ est indépendant de ε^n_{k+1}. Donc $y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}$ est $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{k/n}$-mesurable.
Par conséquent, l'équation (3.4) a une unique solution. □

On définit maintenant les processus en temps continu Y^n et Z^n par $Y_t^n = y^n_{\frac{[nt]}{n}\wedge\tau^n}$, $Z_t^n = z^n_{\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\wedge\tau^n}$, pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ où $\lfloor x\rfloor = (x-1)^+$ si x est un entier, $[x]$ sinon. Les processus Y^n et Z^n sont constants par morceaux sur les intervalles $[k/n,(k+1)/n[$ et $]k/n,(k+1)/n]$ respectivement et satisfont l'équation suivante :

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f(s, Y^n_{(s\wedge\tau^n)-}, Z^n_{s\wedge\tau^n})dA_s^n - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z^n_{s\wedge\tau^n}dW_s^n, \tag{3.5}$$

où $A_s^n = \frac{[ns]}{n}$.

Voici une proposition analogue à la proposition 3.2.2.

Proposition 3.2.4 *Pour tout n, Y^n est presque sûrement borné par $\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$.*

Démonstration
Soit $\theta\in\mathbb{N}$. On définit les processus suivants : pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\alpha^n_{\frac{k}{n}} = \begin{cases} \dfrac{f\left(\frac{k}{n}, Y^n_{\frac{k}{n}}, Z^n_{\frac{k+1}{n}}\right) - f\left(\frac{k}{n}, 0, Z^n_{\frac{k+1}{n}}\right)}{Y^n_{\frac{k}{n}}} & \text{si } Y^n_{\frac{k}{n}} \neq 0 \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad R^n_{\frac{k}{n}} = \prod_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n < \frac{j}{n} \leqslant \frac{k}{n}} \left(1 - \frac{\alpha^n_{\frac{j-1}{n}}}{n}\right)^{-1}.$$

On a, pour tout $k>\theta$,

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(R^n_{\frac{k}{n}} Y^n_{\frac{k}{n}}\right) \\
&= R^n_{\frac{k}{n}}\Delta\left(Y^n_{\frac{k}{n}}\right) + \Delta\left(R^n_{\frac{k}{n}}\right) Y^n_{\frac{k-1}{n}} \\
&= R^n_{\frac{k}{n}}\left(-\frac{1}{n}\left(\alpha^n_{\frac{k-1}{n}} Y^n_{\frac{k-1}{n}} + f\left(\frac{k-1}{n}, 0, Z^n_{\frac{k}{n}}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} Z^n_{\frac{k}{n}}\varepsilon^n_k\right) + \frac{1}{n}\alpha^n_{\frac{k-1}{n}} R^n_{\frac{k}{n}} Y^n_{\frac{k-1}{n}} \\
&= -\frac{1}{n} R^n_{\frac{k}{n}}\left(\alpha^n_{\frac{k-1}{n}} Y^n_{\frac{k-1}{n}} + f\left(\frac{k-1}{n}, 0, Z^n_{\frac{k}{n}}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} R^n_{\frac{k}{n}} Z^n_{\frac{k}{n}}\varepsilon^n_k.
\end{aligned}$$

En sommant sur les $\frac{k}{n}$ entre $\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n$ et τ^n, il vient :

$$R^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n} Y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n} = R^n_{\tau^n} Y^n_{\tau^n} + \frac{1}{n}\sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n} R^n_{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k-1}{n}, 0, Z^n_{\frac{k}{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n} R^n_{\frac{k}{n}} Z^n_{\frac{k}{n}}\varepsilon^n_k.$$

Par construction, $R^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n} = 1$. En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}$, on a :

$$\left|Y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|R^n_{\tau^n} Y^n_{\tau^n}\right| \,\middle|\, \mathcal{F}^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right] + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n} R^n_{\frac{k}{n}}\left|f\left(\frac{k-1}{n}, 0, Z^n_{\frac{k}{n}}\right)\right| \,\middle|\, \mathcal{F}^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right].$$

De plus, d'après l'hypothèse de monotonie, pour tout j, $\alpha^n_{(j-1)/n} \leqslant -\mu$. Aussi, pour tout k, $R^n_{k/n} \leqslant (1+\mu/n)^{\theta-k}$. Alors,

$$\left|Y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right| \leqslant \|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty \frac{1}{n}\sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{\theta-k} \leqslant \|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Finalement, comme Y^n est constant par morceaux sur les intervalles $[k/n,(k+1)/n[$, on a donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |Y^n_{t\wedge\tau^n}| \leqslant \|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty \left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

$\square$

3.2.2 Convergence des solutions

On suppose de plus que $\sup_n \|\xi^n\|_\infty < +\infty$ (ce qui entraîne que (Y^n) est uniformément bornée) ainsi que les propriétés de convergence suivantes : $\xi^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, $W^n \xrightarrow{\mathbb{P}} W$ et $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$. Sous toutes ces hypothèses, on obtient le théorème suivant de stabilité des solutions.

Théorème 3.2.5 *Sous toutes les hypothèses données prédemment, on a les convergences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}|Y^n_t - Y_t| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t}|Z^n_t - Z_t|^2 dt &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\\
\forall L,\ \sup_{t\in[0,L]} \left|\int_0^t Z^n_s dW^n_s - \int_0^t Z_s dW_s\right| &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\\
\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left|\int_0^t e^{-\mu s} Z^n_s dW^n_s - \int_0^t e^{-\mu s} Z_s dW_s\right| &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0.
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.6 La première convergence entraîne en particulier la convergence uniforme de Y^n vers Y sur tous les compacts $[0,L]$.

Ce théorème permet d'obtenir la convergence en probabilité des solutions sous des hypothèses assez fortes de convergence en probabilité des marches aléatoires vers le mouvement brownien et de convergence en probabilité des conditions terminales. En fait, grâce au théorème de Donsker, on a la convergence en loi de marches aléatoires vers le mouvement brownien. Si on a seulement cette convergence en loi, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.7 *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR (3.3) et (Y^n,Z^n) les processus constants par morceaux sur les intervalles $[k/n,(k+1)/n[$ et $]k/n,(k+1)/n]$ respectivement solutions de l'équation (3.5). On suppose que $\forall n, \forall k, \varepsilon^n_k = \varepsilon_k$, $\xi = g(W)$ et $\xi^n = g(W^n)$ avec g continue bornée. On suppose également que $(W^n,\tau^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W,\tau)$. Alors $\left(Y^n_{.\wedge\tau^n}, \int_0^{.\wedge\tau^n} Z^n_s dW^n_s\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(Y_{.\wedge\tau}, \int_0^{.\wedge\tau} Z_s dW_s\right)$ pour la topologie de Skorokhod.*

Démonstration du corollaire

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, il existe $(\tilde{W}^n,\tilde{\tau}^n)$ de même loi que (W^n,τ^n) et $(\tilde{W},\tilde{\tau})$ de même loi que (W,τ) tels que $(\tilde{W}^n,\tilde{\tau}^n) \xrightarrow{p.s.} (\tilde{W},\tilde{\tau})$. On note $\tilde{\mathcal{F}}$ la filtration engendrée par $\tilde{W}$ et $\tilde{\mathcal{F}}^n$ celles engendrées par les $\tilde{W}^n$. Alors $\tilde{\tau}$ est un

$\tilde{\mathcal{F}}$-temps d'arrêt et les $\tilde{\tau}^n$ sont des $\tilde{\mathcal{F}}^n$-temps d'arrêt d'après le lemme 1.1.21.
Soit (Y'^n, Z'^n) la solution de

$$Y_t'^n = g(\tilde{W}^n) + \int_{t\wedge\tilde{\tau}^n}^{\tilde{\tau}^n} f(Y'^n_{(s\wedge\tilde{\tau}^n)-}, Z'^n_{s\wedge\tilde{\tau}^n})dA_s^n - \int_{t\wedge\tilde{\tau}^n}^{\tilde{\tau}^n} Z'^n_{s\wedge\tilde{\tau}^n} d\tilde{W}_s^n$$

et (Y', Z') la solution de

$$Y'_{t\wedge\tilde{\tau}} = g(\tilde{W}) + \int_{t\wedge\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}} f(Y'_s, Z'_s)ds - \int_{t\wedge\tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}} Z'_s d\tilde{W}_s,\ t \geqslant 0.$$

Toutes les hypothèses du théorème 3.2.5 sont vérifiées. On a donc convergence en probabilité de $\left(Y'^n_{.\wedge\tilde{\tau}^n}, \int_0^{.\wedge\tilde{\tau}^n} Z'^n_s d\tilde{W}_s^n\right)_n$ vers $\left(Y'_{.\wedge\tilde{\tau}}, \int_0^{.\wedge\tilde{\tau}} Z'_s d\tilde{W}_s\right)$. Alors, notant (Y^n, Z^n) la solution de (3.3) et (Y, Z) celle de (3.5), comme (Y^n, Z^n, W^n, τ^n) a même loi que $(Y'^n, Z'^n\tilde{W}^n, \tilde{\tau}^n)$ et (Y, Z, W, τ) a même loi que $(Y', Z', \tilde{W}, \tilde{\tau})$, on aura la convergence en loi de $\left(Y^n_{.\wedge\tau^n}, \int_0^{.\wedge\tau^n} Z_s^n dW_s^n\right)_n$ vers $\left(Y_{.\wedge\tau}, \int_0^{.\wedge\tau} Z_s dW_s\right)$ pour la topologie de Skorokhod.
$\square$

Remarque 3.2.8 On notera que, dans ce corollaire, on a besoin de la convergence jointe de $((W^n, \tau^n))_n$ vers (W, τ). On verra dans la section 3.2.3 un exemple de situation où cette condition est satisfaite.

La fin de cette section est consacrée à la preuve du théorème 3.2.5.

- Montrons que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}|Y_t^n - Y_t| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t}|Z_t^n - Z_t|^2 dt \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.6}$$

Dans cette preuve, on notera cette convergence $(Y^n, Z^n) \to (Y, Z)$.

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, on note (Y^K, Z^K) la solution de l'EDSR suivante :

$$Y^K_{t\wedge\tau\wedge K} = \xi \mathbf{1}_{\tau\leqslant K} + \int_{t\wedge\tau\wedge K}^{\tau\wedge K} f(s, Y_s^K, Z_s^K)ds - \int_{t\wedge\tau\wedge K}^{\tau\wedge K} Z_s^K dW_s,\ \forall t \geqslant 0. \tag{3.7}$$

On considère également les processus discrets $(y^{n,K}, z^{n,K})$ solutions de l'équation

$$\begin{cases} y^{n,K}_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n} = y^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n} + \frac{1}{n}\mathbf{1}_{\{\tau^n\geqslant\frac{k}{n}\}} f\left(\frac{k}{n}, y^n_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}, z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\right) - z^n_{\frac{k+1}{n}\wedge\tau^n}\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon^n_{k+1}, \\ \qquad\qquad k = 0, \ldots, K-1, \\ y^n_{\tau^n} = \xi^n \end{cases}$$

A ces processus discrets, on associe les processus constants par morceaux $(Y^{n,K}, Z^{n,K})$ qui sont solution de l'équation suivante :

$$Y_t^{n,K} = \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n\leqslant K} + \int_{t\wedge\tau^n\wedge K}^{\tau^n\wedge K} f(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})dA_s^n - \int_{t\wedge\tau^n\wedge K}^{\tau^n\wedge K} Z_s^{n,K} dW_s^n,\ \forall t \geqslant 0 \tag{3.8}$$

avec $A_s^n = \frac{[ns]}{n}$.

On va alors montrer successivement les convergences suivantes :
- pour tout K, $(Y^{n,K}, Z^{n,K}) \to (Y^K, Z^K)$ quand n tend vers $+\infty$,
- $(Y^K, Z^K) \to (Y, Z)$ quand K tend vers $+\infty$,
- $(Y^{n,K}, Z^{n,K}) \to (Y^n, Z^n)$ uniformément par rapport à n quand K tend vers l'infini.

Convergence de $((Y^{n,K}, Z^{n,K}))_n$ **vers** (Y^K, Z^K)
On réécrit les équations (3.7) et (3.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Y_t^K &= \xi \mathbf{1}_{\tau \leqslant K} + \int_t^K f(s, Y_s^K, Z_s^K) \mathbf{1}_{s \leqslant \tau} ds - \int_t^K Z_s^K dW_s, \\ Y_t^{n,K} &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n \leqslant K} + \int_t^K f(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K}) \mathbf{1}_{s \leqslant \tau^n} dA_s^n - \int_t^K Z_s^{n,K} dW_s^n, \ \forall t \in [0, K]. \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à des équations à horizon déterministe K. En appliquant les résultats de Briand, Delyon et Mémin dans [11], on a alors :

$$\forall K, \ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |Y_t^{n,K} - Y_t^K| + \int_0^{+\infty} |Z_s^{n,K} - Z_s^K|^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ quand } [n \to +\infty]. \tag{3.9}$$

Convergence de $((Y^K, Z^K))_K$ **vers** (Y, Z)

Notant $\delta Y = Y - Y^K$ et $\delta Z = Z - Z^K$, on a pour tout $t \in [0, K]$

$$\delta Y_{t \wedge \tau} = \xi \mathbf{1}_{\tau > K} + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s^K, Z_s^K) \mathbf{1}_{s \leqslant K}) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \delta Z_s dW_s.$$

On écrit ensuite

$$f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s^K, Z_s^K) \mathbf{1}_{s \leqslant K} = \alpha_s^K \delta Y_s + \beta_s^K \delta Z_s + f(s, Y_s^K, Z_s^K) \mathbf{1}_{s > K}$$

avec

$$\alpha_s^K = \begin{cases} \frac{f(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s^K, Z_s)}{\delta Y_s} & \text{si } \delta Y_s \neq 0, \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\beta_s^K = \begin{cases} \frac{f(s, Y_s^K, Z_s) - f(s, Y_s^K, Z_s^K)}{\delta Z_s} & \text{si } \delta Z_s \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\theta \in [0, K]$. On pose $R_t^K = exp\left(\int_{\theta \wedge \tau}^t \alpha_s^K ds\right)$ et $W_t^K = W_t - \int_0^t \beta_s^K ds$. On note $\mathbb{P}^K$ la probabilité obtenue en appliquant le théorème de Girsanov. W^K est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^K$. Avec les notations introduites, on a

$$\delta Y_{t \wedge \tau} = \xi \mathbf{1}_{\tau > K} + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} (\alpha_s^K \delta Y_s + f(s, Y_s^K, Z_s^K) \mathbf{1}_{s > K}) ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} \delta Z_s dW_s^K.$$

On applique la formule d'Itô à $R_t^K \delta Y_t$ et on intègre entre $\theta \wedge \tau$ et τ. Alors,

$$\delta Y_{\theta \wedge \tau} = R_\tau^K \delta Y_\tau + \int_{\theta \wedge \tau}^{\tau} R_s^K f(s, Y_s^K, Z_s^K) \mathbf{1}_{s > K} ds - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} R_s^K \delta Z_s dW_s^K.$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}$ sous la probabilité $\mathbb{P}^K$, on a

$$|\delta Y_{\theta\wedge\tau}| \leqslant \mathbb{E}[R_\tau^K|\delta Y_\tau|\ |\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}] + \mathbb{E}\left[\int_{K\wedge\tau}^{\tau} R_s^K|f(s,Y_s^K,Z_s^K)|ds\Big|\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau}\right].$$

Or, pour tout t, $R_t^K \leqslant e^{-\mu(t-\theta\wedge\tau)}$. Donc, en particulier,

$$R_\tau^K|\delta Y_\tau| = R_\tau^K|\xi|\mathbf{1}_{\tau>K} \leqslant \|\xi\|_\infty e^{-\mu(K-(\theta\wedge\tau))}.$$

D'autre part,

$$\int_{K\wedge\tau}^{\tau} R_s^K|f(s,Y_s^K,Z_s^K)|ds \leqslant \|f\|_\infty e^{\mu(\theta\wedge\tau)}\int_{K\wedge\tau}^{\tau} e^{-\mu t}dt \leqslant \|f\|_\infty \frac{e^{-\mu(K-(\theta\wedge\tau))}}{\mu}.$$

Finalement, on a donc :

$$\forall\theta\in[0,K],\ |Y_{\theta\wedge\tau}-Y_{\theta\wedge\tau}^K| \leqslant \left(\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)e^{-\mu(K-(\theta\wedge\tau))}. \tag{3.10}$$

Donnons un majorant de $\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right]$.
On écrit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge K} e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\tau\wedge K}^{\tau} e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right].$$

En utilisant la majoration (3.10), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge K} e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau\wedge K} e^{-2\mu s}\left(\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{-2\mu(K-s)}ds\right]\\ &\leqslant K\left(\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{-2\mu K}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}\left[\int_{\tau\wedge K}^{\tau} e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{K<\tau}\int_K^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right].$$

Or, d'après la proposition 3.2.2, on peut majorer $|Y_t^K|$ et $|Y_t|$ par $\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}$ pour tout t. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{\tau\wedge K}^{\tau} e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right] &\leqslant 4\left(\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)^2\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{K<\tau}\int_K^\tau e^{-2\mu s}ds\right]\\ &\leqslant \frac{2}{\mu}\left(\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{-2\mu K}.\end{aligned}$$

Finalement, on a la majoration suivante :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2ds\right] \leqslant \left(K+\frac{2}{\mu}\right)\left(\|\xi\|_\infty+\frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{-2\mu K}. \tag{3.11}$$

Montrons que $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z_s - Z_s^K|^2 ds\right] \to 0$ quand $[K \to +\infty]$.
On rappelle que, avec les notations définies plus haut, on a :

$$\delta Y_{t\wedge\tau} = \xi \mathbf{1}_{\tau>K} + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} (\alpha_s^K \delta Y_s + \beta_s^K \delta Z_s + f(s, Y_s^K, Z_s^K)\mathbf{1}_{s>K}) ds - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} \delta Z_s dW_s.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2$.

$$\begin{aligned}
&d(e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2) = \\
&\quad -2\mu e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2 ds \\
&\qquad +2e^{-2\mu s}\delta Y_s \left(-\left(\alpha_s^K \delta Y_s + \beta_s^K \delta Z_s + f(s, Y_s^K, Z_s^K)\mathbf{1}_{s>K}\right) ds + \delta Z_s dW_s\right) \\
&\qquad\quad +e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 ds.
\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et τ, puis en prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$, il vient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-2\mu\tau}|\xi|^2 \mathbf{1}_{\tau>K}\right] - \mathbb{E}[|\delta Y_0|^2] + 2\mu\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2 ds\right] \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}\alpha_s^K (\delta Y_s)^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}\delta Y_s \left(\beta_s^K \delta Z_s + f(s, Y_s^K, Z_s^K)\mathbf{1}_{s>K}\right) ds\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[e^{-2\mu\tau}|\xi|^2 \mathbf{1}_{\tau>K}\right] - \mathbb{E}[|\delta Y_0|^2] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}\delta Y_s \left(\beta_s^K \delta Z_s + f(s, Y_s^K, Z_s^K)\mathbf{1}_{s>K}\right) ds\right] \\
&\quad \text{car } f \text{ est monotone (donc } \alpha_s^K (\delta Y_s)^2 \leqslant -\mu|\delta Y_s|^2) \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[e^{-2\mu\tau}|\xi|^2 \mathbf{1}_{\tau>K}\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}\left(|\beta_s^K \delta Z_s|\, |\delta Y_s| + |f(s, Y_s^K, Z_s^K)|\, |\delta Y_s|\mathbf{1}_{s>K}\right) ds\right] \\
&\leqslant e^{-2\mu K}\|\xi\|_\infty + 2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}\gamma|\delta Z_s|\, |\delta Y_s| ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_K^\tau \|f\|_\infty e^{-2\mu s}|\delta Y_s| ds\right] \\
&\leqslant e^{-2\mu K}\|\xi\|_\infty + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 ds\right] + 2\gamma^2\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2 ds\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\int_K^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2 ds\right] + \|f\|_\infty^2\mathbb{E}\left[\int_K^\tau e^{-2\mu s} ds\right] \text{ car } \forall\varepsilon>0,\ 2ab \leqslant \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 ds\right] \\
&\leqslant e^{-2\mu K}\left(\|\xi\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty^2}{2\mu}\right) + (2\gamma^2+1)\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Y_s|^2 ds\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la majoration (3.11) et le fait que $Z = Z^K = 0$ sur $\{t \geqslant \tau\}$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 ds\right] \\
&\leqslant 2\left(\|\xi\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty^2}{2\mu} + (2\gamma^2+1)\left(K + \frac{2}{\mu}\right)\left(\|\xi\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right)^2\right) e^{-2\mu K}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

En prouvant la majoration (3.10), on a en particulier montré que, pour tout θ,

$$e^{-\mu(\theta\wedge\tau)}|Y_{\theta\wedge\tau} - Y^K_{\theta\wedge\tau}| \leqslant \left(\|\xi\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\mu}\right) e^{-\mu K}.$$

Aussi,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}\left|Y_t - Y^K_t\right|\right] \xrightarrow[K\to\infty]{} 0. \tag{3.13}$$

D'après la convergence (3.13) et l'inégalité (3.12), on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}\left|Y_t - Y^K_t\right| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\left|Z_s - Z^K_s\right|^2 ds\right] \xrightarrow[K\to\infty]{} 0. \tag{3.14}$$

Convergence de $((Y^{n,K}, Z^{n,K}))_K$ **vers** (Y^n, Z^n)

On a, pour tout $k \in [0, nK]$,

$$\begin{aligned}
y^{n,K}_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n} &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n\leqslant K} + \frac{1}{n}\sum_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\tau^n\wedge K} f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^{n,K}_{\frac{j+1}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\tau^n\wedge K} z^{n,K}_{\frac{j+1}{n}}\varepsilon^n_{j+1},\\
y^{n}_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n} &= \xi^n + \frac{1}{n}\sum_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\tau^n} f\left(\frac{j}{n}, y^{n}_{\frac{j}{n}}, z^{n}_{\frac{j+1}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\tau^n} z^{n}_{\frac{j+1}{n}}\varepsilon^n_{j+1}.
\end{aligned}$$

On note $\delta y^n = y^{n,K} - y^n$ et $\delta z^n = z^{n,K} - z^n$. Alors, pour tout $k \in [0, nK]$,

$$\begin{aligned}
\delta y^{n}_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n} &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n > K} + \frac{1}{n}\sum_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\tau^n}\left(f\left(\frac{j}{n}, y^{n}_{\frac{j}{n}}, z^{n}_{\frac{j+1}{n}}\right) - f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^{n,K}_{\frac{j+1}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{j}{n}\leqslant K}\right)\\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\tau^n}\delta z^{n}_{\frac{j+1}{n}}\varepsilon^n_{j+1}.
\end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{j}{n}, y^{n}_{\frac{j}{n}}, z^{n}_{\frac{j+1}{n}}\right) - f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^{n,K}_{\frac{j+1}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{j}{n}\leqslant K}\\
&\quad = \alpha^{n,K}_{\frac{j}{n}}\delta y^n_{\frac{j}{n}} + \beta^{n,K}_{\frac{j}{n}}\delta z^n_{\frac{j+1}{n}} + f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^{n,K}_{\frac{j+1}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{j}{n}>K}
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha^{n,K}_{\frac{j}{n}} = \begin{cases} \dfrac{f\left(\frac{j}{n}, y^n_{\frac{j}{n}}, z^n_{\frac{j+1}{n}}\right) - f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^n_{\frac{j+1}{n}}\right)}{\delta y^n_{\frac{j}{n}}} & \text{si } \delta y^n_{\frac{j}{n}} \neq 0,\\ -\mu & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$\beta^{n,K}_{\frac{j}{n}} = \begin{cases} \dfrac{f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^n_{\frac{j}{n}}\right) - f\left(\frac{j}{n}, y^{n,K}_{\frac{j}{n}}, z^{n,K}_{\frac{j}{n}}\right)}{\delta z^n_{\frac{j}{n}}} & \text{si } \delta z^n_{\frac{j}{n}} \neq 0,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Soit $\theta \in [0, nK] \cap \mathbb{N}$. On pose

$$R^n_{\frac{k}{n}} = \prod_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n < \frac{j}{n} \leqslant \frac{k}{n}} \left(1 - \frac{\alpha^n_{\frac{j-1}{n}}}{n}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad W^{n,K}_{\frac{k}{n}} = W^n_{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} \beta^{n,K}_{\frac{j}{n}}.$$

Grâce au théorème de Girsanov discret, on obtient une probabilité $\mathbb{P}^{n,K}$ sous laquelle $W^{n,K}$ est une $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$-martingale. On explicite $\Delta(R^{n,K}_{\frac{k}{n}} \delta y^n_{\frac{k}{n}})$ et on somme entre $\frac{\theta}{n} \wedge \tau^n$ et τ^n.

$$\begin{aligned} R^{n,K}_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n} \delta y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n} &= R^{n,K}_{\tau^n} \delta y^n_{\tau^n} + \frac{1}{n} \sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \tau^n} R^{n,K}_{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}, y^{n,K}_{\frac{k}{n}}, z^{n,K}_{\frac{k+1}{n}}\right) \mathbf{1}_{\frac{k}{n}>K} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \tau^n} R^{n,K}_{\frac{k}{n}} \delta z^{n,K}_{\frac{k+1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \tau^n} \delta z^{n,K}_{\frac{k+1}{n}} \varepsilon^n_{k+1}. \end{aligned}$$

Puis on prend l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{\theta}{n}}$ sous la probabilité $\mathbb{P}^{n,K}$. On a :

$$\begin{aligned} \left|\delta y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right| &\leqslant \mathbb{E}\left[|R^{n,K}_{\tau^n} \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n>K}| \middle| \mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{\theta}{n}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \tau^n} R^{n,K}_{\frac{k}{n}} \left| f\left(\frac{k}{n}, y^{n,K}_{\frac{k}{n}}, z^{n,K}_{\frac{k+1}{n}}\right)\right| \mathbf{1}_{\frac{k}{n}>K} \middle| \mathcal{F}^{n,\tau^n}_{\frac{\theta}{n}} \right]. \end{aligned}$$

Or, pour tout k, $R^{n,K}_{\frac{k}{n}} \leqslant \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\theta-k}$. Donc, en particulier,

$$R^{n,K}_{\tau^n} \mathbf{1}_{\tau^n>K} \leqslant \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\theta-nK}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \tau^n} R^{n,K}_{\frac{k}{n}} \left| f\left(\frac{k}{n}, y^{n,K}_{\frac{k}{n}}, z^{n,K}_{\frac{k+1}{n}}\right)\right| \mathbf{1}_{\frac{k}{n}>K} &\leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n} \sum_{K\wedge\tau^n \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \tau^n} \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\theta-k} \\ &\leqslant \|f\|_\infty \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\theta-n(K\wedge\tau^n)} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\forall \theta \in [0, nK] \cap \mathbb{N}, \ \left|\delta y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right| \leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\right) \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{\theta-nK}. \tag{3.15}$$

Pour tout $\theta \in [0, nK] \cap \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{-\theta} \left|\delta y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right| \leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\right) \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{nK}.$$

Or, pour tout k, $e^{-\mu k} \leqslant \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{nk} \leqslant e^{-\mu k/2}$. Donc

$$e^{-\mu\frac{\theta}{n}} \left|\delta y^n_{\frac{\theta}{n}\wedge\tau^n}\right| \leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right) e^{-\mu K/2}.$$

Comme $\sup_n \|\xi^n\|_\infty < +\infty$, on a alors

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}|Y^n_t - Y^{n,K}_t|\right] \to 0 \quad \text{quand} \quad [K\to+\infty]. \tag{3.16}$$

Donnons un majorant de $\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2$. On écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2 \\
&\quad= \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n\wedge K}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2 + \frac{1}{n}\sum_{\tau^n\wedge K<\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant la majoration (3.15), on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n\wedge K}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2 \\
&\quad\leqslant \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n\wedge K}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)^2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2(k-nK)} \\
&\quad\leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)^2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2nK}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{\tau^n\wedge K<\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2 \\
&\quad\leqslant \left(\|Y^{n,K}\|_\infty + \|Y^n\|_\infty\right)^2 \times \frac{1}{n}\sum_{\tau^n\wedge K<\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k} \\
&\quad\leqslant 4\left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)^2\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2nK}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2 \\
&\quad\leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)^2\left(K+4\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2nK}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Montrons que $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right|^2\right]$ converge vers 0 quand K tend vers l'infini, uniformément en n.
On explicite $\Delta((1+\frac{\mu}{n})^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2)$.

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2\right)\\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\Delta\left(\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2\right)+\Delta\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\right)\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2\\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(\left(\Delta y^n_{\frac{k}{n}}\right)^2+2\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\Delta y^n_{\frac{k}{n}}\right)+\left|\delta y^n_{\frac{k}{n}}\right|^2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(1-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2\right)\\
&= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\times\\
&\quad\left(\left\{-\frac{1}{n}\left(\alpha^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}+\beta^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}+f\left(\frac{k-1}{n},y^{n,K}_{\frac{k-1}{n}},z^{n,K}_{\frac{k}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{k-1}{n}>K}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}\varepsilon^n_k\right\}^2\right.\\
&\quad+2\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\left\{-\frac{1}{n}\left(\alpha^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}+\beta^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}+f\left(\frac{k-1}{n},y^{n,K}_{\frac{k-1}{n}},z^{n,K}_{\frac{k}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{k-1}{n}>K}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}\varepsilon^n_k\right\}\Bigg)\\
&\quad+\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(1-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

En sommant de 0 à τ^n et en prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2[n\tau^n]}\left|\delta y^n_{\frac{[n\tau^n]}{n}}\right|^2-|\delta y^n_0|^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{1}{n^2}\left(\alpha^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}+\beta^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}+f\left(\frac{k-1}{n},y^{n,K}_{\frac{k-1}{n}},z^{n,K}_{\frac{k}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{k-1}{n}>K}\right)^2\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\times\frac{1}{n}\left(\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right)^2\right]\\
&\quad-\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{2}{n}\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\left(\alpha^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}+\beta^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}+f\left(\frac{k-1}{n},y^{n,K}_{\frac{k-1}{n}},z^{n,K}_{\frac{k}{n}}\right)\mathbf{1}_{\frac{k-1}{n}>K}\right)\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant\frac{k}{n}\leqslant\tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\left(1-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant notamment le fait que $\alpha^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}(\delta y^n_{\frac{k-1}{n}})^2 \leqslant -\mu(\delta y^n_{\frac{k-1}{n}})^2 < 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right)^2\right]\\
&\leqslant \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2nK}\|\xi^n\|^2_\infty + \frac{2}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\beta^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right|\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|\right]\\
&\quad +\frac{2}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|\left|f\left(\frac{k-1}{n}, y^{n,K}_{\frac{k-1}{n}}, z^{n,K}_{\frac{k}{n}}\right)\right|\mathbf{1}_{\frac{k-1}{n}>K}\right]\\
&\quad +\frac{2\mu}{n}\left(1+\frac{\mu}{2n}\right)\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\right]\\
&\leqslant \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2nK}\|\xi^n\|^2_\infty\\
&\quad +\frac{1}{2n}\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right|^2\right] + \frac{2\gamma^2}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\right]\\
&\quad +\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\right] + \frac{\|f\|^2_\infty}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{\frac{k-1}{n}>K}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\right]\\
&\quad +\frac{2\mu}{n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\right].
\end{aligned}$$

De plus, comme $\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k} \leqslant e^{-\mu k}$ et en utilisant l'inégalité (3.17), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{2n}\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right)^2\right]\\
&\leqslant e^{-\mu K}\|\xi^n\|^2_\infty + \frac{1}{n}\left(2\gamma^2+2\mu\left(1+\frac{\mu}{n}\right)+1\right)\mathbb{E}\left[\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left|\delta y^n_{\frac{k-1}{n}}\right|^2\right]\\
&\quad +\frac{\|f\|^2_\infty}{n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-nK}\left(1-\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-1}\right)^{-1}\\
&\leqslant e^{-\mu K}\|\xi^n\|^2_\infty + \|f\|^2_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)e^{-\mu K/2}\\
&\quad +\left(2\gamma^2+2\mu\left(1+\frac{\mu}{n}\right)+1\right)\left(\|\xi^n\|^2_\infty+\|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)^2\left(K+4\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)e^{-\mu K}.
\end{aligned}$$

Finalement, comme $Z^{n,K} = Z^n = 0$ sur $\{t \geqslant \tau^n\}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant \tau^n}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}\left(\delta z^n_{\frac{k}{n}}\right)^2\right]\\
&\leqslant\ 2\Bigg(\left(\|\xi^n\|^2_\infty+\|f\|_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)^2\left(K+4\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)\left(2\gamma^2+2\mu\left(1+\frac{\mu}{n}\right)+1\right)\\
&\qquad +\|\xi^n\|^2_\infty+\|f\|^2_\infty\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\Bigg)e^{-\mu K/2}. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z^n_s - Z^{n,K}_s|^2 ds &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-2\mu s}|Z^n_s - Z^{n,K}_s|^2 ds\\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2\mu k/n}|\delta z^n_{\frac{k+1}{n}}|^2\\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-2k}|\delta z^n_{\frac{k+1}{n}}|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'inégalité (3.18), on a

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z^n_s - Z^{n,K}_s|^2 ds\right] \to 0 \ \text{ quand } \ [K\to+\infty]. \qquad (3.19)$$

Par conséquent, d'après les convergences (3.16) et (3.19), on a

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}|Y^n_t - Y^{n,K}_t| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z^n_s - Z^{n,K}_s|^2 ds\right] \to 0 \ \text{ quand } \ [K\to+\infty]. \qquad (3.20)$$

Conclusion

D'après les convergences (3.9), (3.14) et (3.20), on a la convergence (3.6), première convergence annoncée dans le théorème.

• Montrons maintenant la convergence suivante

$$\forall L,\ \sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t Z^n_s dW^n_s - \int_0^t Z_s dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Pour montrer cette convergence, on écrit

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t Z^n_s dW^n_s - \int_0^t Z_s dW_s\right|\\
&\leqslant \left|\int_0^t Z^n_s dW^n_s - \int_0^t Z^{n,K}_s dW^n_s\right| + \left|\int_0^t Z^{n,K}_s dW^n_s - \int_0^t Z^K_s dW_s\right|\\
&\quad + \left|\int_0^t Z^K_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s\right|.
\end{aligned}$$

D'après les résultats de Briand, Delyon et Mémin dans [11], on a

$$\forall K,\ \sup_{t\in[0,K]}\left|\int_0^t Z_s^{n,K}dW_s^n - \int_0^t Z_s^K dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \ \text{ quand } [n\to\infty]. \tag{3.21}$$

D'autre part, pour tout L,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t (Z_s^n - Z_s^{n,K})dW_s^n\right|\right] \\
&\leqslant\ C\mathbb{E}\left[\int_0^L |Z_s^n - Z_s^{n,K}|^2 dA_s^n\right]^{1/2} \quad \text{d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy} \\
&\leqslant\ C\mathbb{E}\left[\int_0^L |Z_s^n - Z_s^{n,K}|^2 ds\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^L |Z_s^n - Z_s^{n,K}|^2 ds\right]^{1/2} \leqslant e^{2\mu L}\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z_s^n - Z_s^{n,K}|^2 ds\right]^{1/2} \to 0$$

uniformément par rapport à n quand K tend vers l'infini. Aussi,

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t (Z_s^n - Z_s^{n,K})dW_s^n\right|\right] \to 0 \ \text{ quand } [K\to\infty]. \tag{3.22}$$

Par le même raisonnement, on a la convergence

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t (Z_s^K - Z_s)dW_s\right|\right] \to 0 \ \text{ quand } [K\to\infty]. \tag{3.23}$$

Grâce aux convergences (3.22), (3.21) et (3.23), on a finalement la deuxième convergence annoncée dans le théorème

$$\forall L,\ \sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t Z_s^n dW_s^n - \int_0^t Z_s dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

- Pour finir, montrons que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left|\int_0^t e^{-\mu s}Z_s^n dW_s^n - \int_0^t e^{-\mu s}Z_s dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

On considère les processus M^n, constants par morceaux sur les intervalles du type $[k/n,(k+1)/n[$, et M définis par

$$M_{\frac{k}{n}}^n = y_{\frac{k}{n}\wedge\tau^n}^n e^{-\mu\left(\frac{k}{n}\wedge\tau^n\right)} + \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\frac{k}{n}\wedge\tau^n} e^{-\mu\frac{j}{n}} f\left(\frac{j}{n}, y_{\frac{j}{n}}^n, z_{\frac{j+1}{n}}^n\right) + \left(e^{\frac{\mu}{n}}-1\right)\sum_{0\leqslant\frac{j}{n}\leqslant\frac{k}{n}\wedge\tau^n} e^{-\mu\frac{j}{n}} y_{\frac{j}{n}}^n$$

et

$$M_t = Y_{t\wedge\tau}e^{-\mu(t\wedge\tau)} + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-\mu s}f(s,Y_s,Z_s)ds + \mu\int_0^{t\wedge\tau} e^{-\mu s}Y_s ds.$$

En appliquant la formule d'Itô, on montre que

$$\begin{aligned} M^n_{\frac{k}{n}} &= M^n_0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{0 \leqslant \frac{j}{n} \leqslant \tau^n} e^{-\mu \frac{j}{n}} z^n_{\frac{j}{n}} \varepsilon^n_j, \\ M_t &= M_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{-\mu s} Z_{s\wedge\tau} dW_s. \end{aligned}$$

On remarque que (M^n) est une suite de $(\mathcal{F}^{n,\tau^n})$-martingales et que M est une $\mathcal{F}^\tau$-martingale. On peut donc écrire :

$$M^n_t = \mathbb{E}[M^n_{\tau^n} | \mathcal{F}^{n,\tau^n}_t] \text{ et } M_t = \mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}^\tau_t]$$

avec

$$\begin{aligned} M^n_{\tau^n} &= \xi^n e^{-\mu\tau^n} + \int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_{s-}, Z^n_s) dA^n_s + n\left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right) \int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} Y^n_s dA^n_s, \\ M_\tau &= \xi e^{-\mu\tau} + \int_0^\tau e^{-\mu s} f(s, Y_s, Z_s) ds + \mu \int_0^\tau e^{-\mu s} Y_s ds. \end{aligned}$$

On va d'abord montrer que $M^n_{\tau^n} \xrightarrow{L^1} M_\tau$. On va montrer cette convergence en probabilité et conclure avec un argument d'uniforme intégrabilité.

$$\begin{aligned} &|M^n_{\tau^n} - M_\tau| \\ &\leqslant |\xi^n e^{-\mu\tau^n} - \xi e^{-\mu\tau}| + \left| \int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_{s-}, Z^n_s) dA^n_s - \int_0^\tau e^{-\mu s} f(s, Y_s, Z_s) ds \right| \\ &\quad + \left| n\left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right) \int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} Y^n_s dA^n_s - \mu \int_0^\tau e^{-\mu s} Y_s ds \right|. \end{aligned}$$

Comme $\xi^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ et $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$, on a

$$|\xi^n e^{-\mu\tau^n} - \xi e^{-\mu\tau}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.24}$$

D'autre part, notant k_n l'entier tel que $\tau^n \in [k_n/n, (k_n+1)/n[$, on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_{s-}, Z^n_s) dA^n_s - \int_0^\tau e^{-\mu s} f(s, Y_s, Z_s) ds \right| \\ &= \left| \int_0^{k_n/n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_s, Z^n_s) ds - \int_0^\tau e^{-\mu s} f(s, Y_s, Z_s) ds \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^{k_n/n\wedge\tau} e^{-\mu s} (f(s, Y^n_s, Z^n_s) - f(s, Y_s, Z_s)) ds \right| \\ &\quad + \left| \int_{k_n/n\wedge\tau}^{k_n/n\vee\tau} (e^{-\mu s} f(s, Y^n_s, Z^n_s) \mathbf{1}_{\{\tau \leqslant k_n/n\}} - e^{-\mu s} f(s, Y_s, Z_s) \mathbf{1}_{\{\tau > k_n/n\}}) ds \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^{k_n/n\wedge\tau} e^{-\mu s} (f(s, Y^n_s, Z^n_s) - f(s, Y_s, Z_s)) ds \right| \\ &\quad + \|f\|_\infty \left| \frac{k_n}{n} - \tau \right|. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{k_n/n\wedge\tau} e^{-\mu s}(f(s,Y_s^n,Z_s^n)-f(s,Y_s,Z_s))ds\right| \\
&\leqslant \int_0^{k_n/n\wedge\tau} e^{-\mu s}\gamma(|Y_s^n-Y_s|+|Z_s^n-Z_s|)ds \quad \text{car } f \text{ est } \gamma\text{-lipschitzienne} \\
&\leqslant \gamma\tau \sup_{s\in\mathbb{R}^+}(e^{-\mu s}|Y_s^n-Y_s|)+\gamma\tau^{1/2}\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z_s^n-Z_s|^2 ds \quad \text{d'après Cauchy-Schwarz} \\
&\xrightarrow{\mathbb{P}} 0
\end{aligned}$$

d'après la convergence (3.6). Aussi, comme $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$,

$$\left|\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} f(s,Y_{s-}^n,Z_s^n)dA_s^n - \int_0^{\tau} e^{-\mu s} f(s,Y_s,Z_s)d_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.25}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
&\left|n\left(e^{\mu/n}-1\right)\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s}Y_s^n dA_s^n - \mu\int_0^{\tau} e^{-\mu s}Y_s ds\right| \\
&= \left|n\left(e^{\mu/n}-1\right)\int_0^{k_n/n} e^{-\mu s}Y_s^n ds - \mu\int_0^{\tau} e^{-\mu s}Y_s ds\right| \\
&\leqslant \mu\left|\int_0^{k_n/n\wedge\tau} e^{-\mu s}Y_s^n ds - \int_0^{k_n/n\wedge\tau} e^{-\mu s}Y_s ds\right| \\
&\qquad \left|\int_0^{k_n/n\wedge\tau}\left(n\left(e^{\mu/n}-1\right)e^{-\mu s}-\mu e^{-\mu s}\right)Y_s^n ds\right| \\
&\qquad +\left|\int_{k_n/n\wedge\tau}^{k_n/n\vee\tau} e^{-\mu s}Y_s^n \mathbf{1}_{\tau\leqslant k_n/n} ds - \int_{k_n/n\wedge\tau}^{k_n/n\vee\tau} e^{-\mu s}Y_s \mathbf{1}_{\tau> k_n/n} ds\right| \\
&\leqslant \tau\sup_{s\in\mathbb{R}^+}(e^{-\mu s}|Y_s^n-Y_s|)+\left|\frac{k_n}{n}-\tau\right|(\sup_n\|Y^n\|_\infty+\|Y\|_\infty) \\
&\qquad +\left|n\left(e^{\mu/n}-1\right)-\mu\right|\tau\sup_n\|Y^n\|_\infty.
\end{aligned}$$

En utilisant la convergence (3.6), le fait que $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ et les propriétés de bornitude de Y^n et Y (on utilise ici l'hypothèse $\sup_n\|\xi^n\|_\infty<\infty$), on a

$$\left|n\left(e^{\mu/n}-1\right)\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s}Y_s^n dA_s^n - \mu\int_0^{\tau} e^{-\mu s}Y_s ds\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \tag{3.26}$$

Finalement, d'après les convergences (3.24), (3.25) et (3.26), on a

$$M_{\tau^n}^n \xrightarrow{\mathbb{P}} M_\tau. \tag{3.27}$$

Pour avoir la convergence dans L^1, on va montrer que $\sup_n \mathbb{E}[|M^n_{\tau^n}|^2]^{1/2} < +\infty$. On a, pour tout n,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M^n_{\tau^n}|^2]^{1/2} \quad &\leqslant \quad \mathbb{E}[|\xi^n e^{-\mu\tau^n}|^2]^{1/2} + \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_{s-}, Z^n_s) dA^n_s\right|^2\right]^{1/2} \\ &\quad + n\left(e^{\mu/n} - 1\right)\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} Y^n_s dA^n_s\right|^2\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Or,
$\mathbb{E}[|\xi^n e^{-\mu\tau^n}|^2]^{1/2} \leqslant \|\xi^n\|_\infty$ et $\sup_n \|\xi^n\|_\infty < +\infty$ par hypothèse,
$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_{s-}, Z^n_s) dA^n_s\right|^2\right]^{1/2} \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\mu k/n} = \frac{\|f\|_\infty}{\mu}$,
$n\left(e^{\mu/n} - 1\right)\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{\tau^n} e^{-\mu s} Y^n_s dA^n_s\right|^2\right]^{1/2} \leqslant \mu e^\mu \sup_n \|Y^n\|_\infty \times \frac{1}{n}\sum_j e^{-\mu j/n} \leqslant e^\mu \sup_n \|Y^n\|_\infty$.
Donc,

$$\sup_n \mathbb{E}[|M^n_{\tau^n}|^2]^{1/2} < +\infty. \tag{3.28}$$

D'après la convergence (3.27) et la propriété d'intégrabilité (3.28), on a $M^n_{\tau^n} \xrightarrow{L^1} M_\tau$.

Si on montre que l'on a la convergence de la suite de filtrations $(\mathcal{F}^{n,\tau^n})_n$ vers $\mathcal{F}^\tau$, d'après le lemme 1.1.65, on aura $M^n \xrightarrow{\mathbb{P}} M$.
$(W^n)_n$ est une suite de processus à accroissements indépendants qui converge en probabilité vers W. Donc, d'après la proposition 1.1.66, $\mathcal{F}^n \xrightarrow{w} \mathcal{F}$. De plus, W est continu et $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$ donc d'après le corollaire 1.1.67, $\mathcal{F}^{n,\tau^n} \xrightarrow{w} \mathcal{F}^\tau$.

Aussi, on a bien $M^n \xrightarrow{\mathbb{P}} M$. De plus, $\mathcal{F}$ est la filtration brownienne, donc, grâce au théorème de représentation des martingales, les $\mathcal{F}$-martingales sont continues. En particulier, $\mathbb{E}[M_\tau|\mathcal{F}_\cdot]$ est continu. Le processus arrêté est aussi continu, *ie* $M_\cdot = \mathbb{E}[M_\tau|\mathcal{F}^\tau_\cdot]$ est un processus continu. Donc, la convergence précédente est uniforme en t sur tout compact, *i.e.*

$$\forall L \geqslant 0, \ \sup_{t\in[0,L]} |M^n_t - M_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Fixons L et $t > L$. On a

$$\begin{aligned}M^n_t - M_t \quad &= \quad M^n_L - M_L + Y^n_{t\wedge\tau^n} e^{-\mu(\frac{[nt]}{n}\wedge\tau^n)} - Y_{t\wedge\tau} e^{-\mu(t\wedge\tau)} \\ &\quad - Y^n_{L\wedge\tau^n} e^{-\mu(\frac{[nL]}{n}\wedge\tau^n)} + Y_{L\wedge\tau} e^{-\mu(L\wedge\tau)} \\ &\quad + \int_{L\wedge\tau^n}^{t\wedge\tau^n} e^{-\mu s} f(s, Y^n_{s-}, Z^n_s) dA^n_s - \int_{L\wedge\tau}^{t\wedge\tau} e^{-\mu s} f(s, Y_s, Z_s) ds \\ &\quad + n\left(e^{\mu/n} - 1\right)\int_{L\wedge\tau^n}^{t\wedge\tau^n} e^{-\mu s} Y^n_s dA^n_s - \mu\int_{L\wedge\tau}^{t\wedge\tau} e^{-\mu s} Y_s ds.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t > L$,

$$\begin{aligned}
&|M_t^n - M_t| \\
&\quad \leqslant \sup_{t\in[0,L]} |M_t^n - M_t| + 2 \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}|Y_t^n - Y_t| \\
&\qquad + \left(2\frac{\|f\|_\infty}{\mu} + e^\mu \sup_n \|Y^n\|_\infty + \|Y\|_\infty\right) e^{-\mu L}.
\end{aligned}$$

Cette inégalité permet de conclure que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |M_t^n - M_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

En particulier, $M_0^n \xrightarrow{\mathbb{P}} M_0$. Par suite,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left|\int_0^t e^{-\mu s} Z_s^n dW_s^n - \int_0^t e^{-\mu s} Z_s dW_s\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

3.2.3 Un exemple

Avant d'étudier un exemple avec des temps d'arrêt particuliers, voyons deux lemmes techniques qui seront très utiles dans la suite.

Lemme 3.2.9 *Soit $(a^n)_n$ une suite de réels convergeant vers a. On considère les fonctions f et f^n définies de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \inf\{t > 0 : x(t) > a\} \quad et \quad f^n(x) = \inf\{t \in]0, n] : x(t) > a^n\} \wedge n$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. *Soit y un processus continu tel que*

$$\inf\{t > 0 : y(t) > a\} = \inf\{t > 0 : y(t) \geqslant a\}.$$

Soit $(y^n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{D}$ qui converge vers y pour la topologie uniforme sur tout compact. Alors $f^n(y^n) \to f(y)$.

Démonstration

Pour tout n, on note $t_n = f^n(y^n)$. On a $y^n(t_n) \geqslant a^n$ ou $t_n = n$.

Soit t une valeur d'adhérence de (t_n) dans $\bar{\mathbb{R}}^+$. Montrons que $t = f(y)$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $t_n \to t$. Comme y est continu et (y^n) converge uniformément vers y, $y^n(t_n) \to y(t)$. Alors en passant à la limite dans la relation $y^n(t_n) \geqslant a^n$, on a $y(t) \geqslant a$. Donc, $t \geqslant f(y)$ car on a supposé que $\inf\{t > 0 : y(t) > a\} = \inf\{t > 0 : y(t) \geqslant a\}$.

Supposons que $t > f(y)$.

Soit $0 < \varepsilon < \frac{t-f(y)}{2}$.

Par définition de $f(y)$, il existe $t_0 \in [f(y), f(y) + \varepsilon[$ tel que $y(t_0) > a$.

On pose $\alpha = \frac{y(t_0)-a}{2} \wedge \varepsilon$.

$y^n \to y$, $t_n \to t$ et $a^n \to a$ donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\sup_t |y_t^n - y_t| < \alpha/4$,

$|t_n - t| < \alpha/4$ et $|a^n - a| < \alpha$. En particulier, pour tout $n \geqslant n_0$, $|y^n(t_0) - y(t_0)| < \alpha/4$. Ainsi,

$$t_n - t_0 > t - \alpha/4 - (f(y) + \varepsilon + \alpha/4) > t - f(y) - \frac{t - f(y)}{2} > 0,$$

donc $t_n > t_0$.
D'autre part, $|y^n(t_0) - y(t_0)| < \alpha/4$ et $|a^n - a| < \alpha$, donc

$$y^n(t_0) - a^n > y(t_0) - \alpha/4 - a - \alpha > \frac{3\alpha}{4} > 0.$$

Par conséquent, $y^n(t_0) > a^n$.Ceci est en contradiction avec la définition de t_n.Donc, $t \leqslant f(y)$.
Par conséquent, $t = f(y)$. $f(y)$ est la seule valeur d'adhérence de $(f^n(y^n))_n$, donc $f^n(y^n) \to f(y)$. □

Lemme 3.2.10 *Soit W un mouvement brownien issu de 0 et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle. On considère les temps d'arrêt suivants :*

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : |W_t| \geqslant a\},$$
$$\tau' = \inf\{t \geqslant 0 : |W_t| > a\}.$$

Alors $\mathbb{P}[\tau \neq \tau'] = 0$.

Démonstration
Pour démontrer ce lemme, on va introduire la suite de temps d'arrêt suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\ \tau^n = \inf\{t \geqslant 0 : |W_t| \geqslant a + 1/n\}.$$

Montrons que $\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau'$.
$(\{t \leqslant 0 : |W_t| \geqslant a + 1/n\})_n$ est une suite décroissante d'ensembles d'intersection $\{t \geqslant 0 : |W_t| > a\}$. En passant à l'infimum, il vient $\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau'$.
Montrons que $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$.
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\tau^n - \tau \geqslant \varepsilon] \\
&\quad = \quad \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[\tau,\tau+\varepsilon[} |W_s| < a + \frac{1}{n}\right] \\
&\quad = \quad \mathbb{P}\left[\max_{s\in[\tau,\tau+\varepsilon]} |W_s| < a + \frac{1}{n}\right] \quad \text{par continuité du mouvement brownien} \\
&\quad = \quad \mathbb{P}^a\left[\max_{s\in[0,\varepsilon]} |W_s| < \frac{1}{n}\right] \quad \text{d'après la propriété de Markov forte} \\
&\quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \mathbb{P}^a\left[\max_{s\in[0,\varepsilon]} |W_s| = 0\right] = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$.
$\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau'$ et $\tau^n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau$, donc $\tau = \tau'$ *p.s, ie*

$$\mathbb{P}[\inf\{t \geqslant 0 : |W_t| \geqslant a\} \neq \inf\{t \geqslant 0 : |W_t| > a\}] = 0.$$

□

Grâce à ces deux lemmes, nous pouvons montrer un résultat de convergence de solutions d'EDSR :

Proposition 3.2.11 *Avec les notations du théorème 3.2.5, on suppose que* $\forall n, \forall k, \varepsilon_k^n = \varepsilon_k$*,* $\xi = g(W)$ *et* $\xi^n = g(W^n)$ *avec* g *continue bornée. Soit* a *un réel positif et* (a^n) *une suite de réels positifs qui converge vers* a*. On définit les temps d'arrêt* $(\tau^n)_n$ *et* τ *de la façon suivante :*

$$\tau = \inf\{t > 0 : |W_t| > a\} \quad et \quad \tau^n = \inf\{t \in]0,n] : |W_t^n| > a^n\} \wedge n$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$*. Alors* $\left(Y^n_{.\wedge\tau^n}, \int_0^{.\wedge\tau^n} Z_s^n dW_s^n\right)_n$ *converge en loi vers* $\left(Y_{.\wedge\tau}, \int_0^{.\wedge\tau} Z_s dW_s\right)$ *pour la topologie de Skorokhod.*

Démonstration
D'après le corollaire 3.2.7, il suffit de montrer que l'on a la convergence jointe en loi $(W^n, \tau^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W, \tau)$.

Le théorème de Donsker nous assure la convergence en loi de W^n vers W. D'après le théorème de représentation de Skorokhod, il existe un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des processus $\tilde{W}^n$ et $\tilde{W}$ tels que $\tilde{W}^n \sim W^n$, $\tilde{W} \sim W$ et $\tilde{W}^n \xrightarrow{p.s.} \tilde{W}$.

On note $E = \left\{\omega \in \tilde{\Omega} : \inf\{t > 0 : |\tilde{W}_t(\omega)| > 1\} \neq \inf\{t > 0 : |\tilde{W}_t(\omega)| \geqslant 1\}\right\}$. D'après le lemme 3.2.10, $\tilde{\mathbb{P}}(E) = 0$. De plus, pour tout $\omega \notin E$, $t \mapsto \tilde{W}_t(\omega)$ est continue, donc d'après le lemme 3.2.9, pour tout $\omega \notin E$, $f^n(\tilde{W}^n(\omega)) \to f(\tilde{W}(\omega))$. Ainsi, $f^n(\tilde{W}^n) \xrightarrow{p.s.} f(\tilde{W})$. On a même

$$(\tilde{W}^n, f^n(\tilde{W}^n)) \xrightarrow{p.s.} (\tilde{W}, f(\tilde{W})).$$

Par construction, $(\tilde{W}^n, f^n(\tilde{W}^n)) \sim (W^n, f^n(W^n))$. Il existe alors un processus Y tel que $(\tilde{W}, f(\tilde{W})) \sim (W, Y)$ et $(W^n, f^n(W^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W, Y)$. Mais, par construction, on a aussi $(\tilde{W}, f(\tilde{W})) \sim (W, f(W))$. Alors $Y = f(W)$ $p.s.$ On a donc

$$(W^n, f(W^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (W, f(W)).$$

D'où la conclusion d'après le corollaire 3.2.7. □

3.3 Approximation du mouvement brownien par une martingale

3.3.1 Problème étudié

Soit W un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par ce processus. Soit τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt fini presquesûrement et $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
On considère l'EDSR suivante :

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_r dW_r, \ t \geqslant 0, \tag{3.29}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et pour tout (y,z), $\{f(t,y,z)\}_t$ est progressivement mesurable.

On va approcher cette équation de la façon suivante.
Soit $(W^n)_n$ une suite de processus càdlàg et $(\mathcal{F}^n)_n$ les filtrations engendrées par ces processus. On suppose que (W^n) est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-martingales de carré intégrable qui converge en probabilité vers W. On ne suppose pas que W^n a la propriété de représentation prévisible. Soit $(\tau^n)_n$ une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt bornés qui converge $p.s.$ vers τ.
On considère alors l'EDSR suivante :

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, Y_{r-}^n, Z_r^n) d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - (N_{\tau^n}^n - N_{t\wedge\tau^n}^n), t \geqslant 0 \tag{3.30}$$

où $(\xi^n)_n$ est une suite de variables aléatoires $(\mathcal{F}_{\tau^n}^n)$-mesurables, (N^n) une suite de martingales orthogonales à (W^{n,τ^n}) et pour tout (y,z), $\{f^n(t,y,z)\}_t$ est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}^n)$.

Pour chaque $L \geqslant 0$, on notera $\mathcal{S}_L^2$ l'ensemble de processus càdlàg X tel que

$$\|X\|_{\mathcal{S}_L^2} = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,L]} |X_t|\right] < +\infty.$$

On fait les hypothèses suivantes sur les martingales et les conditions terminales :

(H1) (i) $\forall L \geqslant 0$, $W^n \xrightarrow{\mathcal{S}_L^2} W$,
(ii) $| < W^n >_t - t| \leqslant a_n$ où $a_n \downarrow 0$.

(H2) (i) $\xi^n \xrightarrow{L^2} \xi$,
(ii) $\|\xi\|_\infty + \sup_n \|\xi^n\|_\infty < \infty$.

3.3.2 Existence et unicité des solutions des EDSR étudiées

Nous allons donner des résultats d'existence et d'unicité de solutions pour les équations (3.29) et (3.30).

Commençons par traiter le cas de l'équation (3.29).
Faisons quelques hypothèses sur le générateur f :

(Hf) (i) f est γ-lipschitzienne en y et z :
$\forall (t,y,z), (t,y',z') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, $|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leqslant \gamma[|y-y'| + |z-z'|]$,
(ii) f est monotone en y de constante de monotonie μ :
$\forall (t,y,z), (t,y',z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, (y-y')(f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leqslant -\mu(y-y')^2$,
(iii) f est bornée.

Sous ces hypothèses, d'après le lemme 3.1 de Briand et Hu dans [12], l'EDSR (3.29) admet une solution (Y,Z) au sens de la définition 3.2.1. De plus, cette solution est unique dans la classe des processus tels que Y est continu et uniformément borné.

Intéressons nous maintenant à l'équation (3.30).
Faisons quelques hypothèses sur les générateurs (f^n) :

(Hfn) (i) pour tout n, f^n est γ-lipschitzienne en y et z,
(ii) pour tout n, f^n est monotone en y de constante de monotonie μ,
(iii) $\sup_n \|f^n\| < \infty$.

On va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR (3.30). Les arguments sont ceux de Briand, Delyon et Mémin dans [11].

Introduisons tout d'abord quelques notations.
Soit n fixé. τ^n est un $\mathcal{F}^n$-temps d'arrêt borné donc il existe $T_n \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout ω, $\tau^n(\omega) \leqslant T_n$.

On définit alors les ensembles suivants :
$\mathcal{S}^{2,n}$ est l'ensemble des processus Y progressivement mesurables par rapport à $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$ tels que $\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T_n]} |Y_{t\wedge\tau^n}|^2\right] < \infty$,
$\mathcal{M}^{2,n}$ est l'ensemble des processus prévisibles Z mesurables par rapport à $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$ tels que $\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} |Z_r|^2 d < W^n >_r\right] < +\infty$,
$\mathcal{H}_0^{2,n}$ est l'ensemble des $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$-martingales de carré intégrable nulles en 0.

Voyons un lemme qui permettra ensuite par un argument de point fixe de prouver l'existence d'une solution de l'EDSR (3.30).

Lemme 3.3.1 *On suppose que les hypothèses (H1), (H2) et (Hfn) sont vérifiées. Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* (U_t, V_t) *dans* $\mathcal{S}^{2,n} \times \mathcal{M}^{2,n}$. *Alors l'EDSR*

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} dN_r^n \tag{3.31}$$

admet une solution dans l'espace $\mathcal{S}^{2,n}\times\mathcal{M}^{2,n}\times\mathcal{H}_0^{2,n}$, *i.e. il existe un triplet* (Y^n, Z^n, N^n) *dans* $\mathcal{S}^{2,n} \times \mathcal{M}^{2,n} \times \mathcal{H}_0^{2,n}$ *vérifiant l'équation (3.31).*

Démonstration
On fait exactement comme dans la preuve du lemme 6 dans [11]. La démonstration repose sur le théorème 4.27 de Jacod dans [24] qui est un résultat de décomposition des martingales de carré intégrable.

On considère

$$Y_t^n = \mathbb{E}\left[\xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r \Big| \mathcal{F}_t^{n,\tau^n}\right].$$

$(Y^n)_n$ est càdlàg et de plus,

$$|Y_t^n| \leqslant \mathbb{E}\left[|\xi^n| + \int_0^{\tau^n} |f^n(r, U_{r-}, V_r)| d < W^n >_r \Big| \mathcal{F}_t^{n,\tau^n}\right].$$

D'après l'inégalité de Doob, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_t |Y_t^n|^2\right] &\leqslant 4\mathbb{E}\left[|\xi^n|^2 + \left(\int_0^{\tau^n} |f^n(r, U_{r-}, V_r)| d < W^n >_r\right)^2\right] \\ &< +\infty \text{ d'après (Hfn)}(ii), \text{(H1)}(ii) \text{ et (H2)}(ii).\end{aligned}$$

Ainsi, A_t^n définie par

$$A_t^n = \mathbb{E}\left[\xi^n + \int_0^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r \middle| \mathcal{F}_t^{n,\tau^n}\right] - Y_0^n$$

est une $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$-martingale de carré intégrable.
Alors, d'après le théorème 4.27 de Jacod [24], il existe $Z^n \in L^2$ et N^n une martingale de carré intégrable des processus $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$-mesurables orthogonaux tels que

$$A_t^n = \int_0^t Z_r^n dW_{r\wedge\tau^n}^n + N_t^n = \int_0^{t\wedge\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N_t^n. \tag{3.32}$$

Montrons que (Y^n, Z^n, N^n) vérifie l'équation (3.31).
On a :

$$\begin{aligned}A_t^n &= \mathbb{E}\left[\xi^n + \int_0^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r \middle| \mathcal{F}_t^{n,\tau^n}\right] - Y_0^n \qquad (3.33)\\ &= Y_t^n + \int_0^{t\wedge\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - Y_0^n.\end{aligned}$$

De plus, prenant $t = \tau^n$, il vient :

$$A_T^n = Y_{\tau^n}^n + \int_0^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - Y_0^n = \int_0^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N_{\tau^n}^n.$$

Donc, $Y_0^n = \xi^n + \int_0^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - \int_0^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - N_{\tau^n}^n$, sachant que $Y_{\tau^n}^n = \xi^n$. Alors,

$$\begin{aligned}A_t^n &= Y_t^n + \int_0^{t\wedge\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - \xi^n - \int_0^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r \\ &\quad + \int_0^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N_{\tau^n}^n \\ &= Y_t^n - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - \xi^n + \int_0^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N_{\tau^n}^n.\end{aligned}$$

D'autre part, $A_t^n = \int_0^{t\wedge\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N_t^n$ d'après (3.32). Aussi,

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r) d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - \int_t^{\tau^n} dN_r^n.$$

Pour tout $t \geqslant \tau^n$, $\int_t^{\tau^n} dN_s^n = 0 = N_{\tau^n}^n - N_t^n$. Aussi,

$$\forall t \geqslant \tau^n, N_t^n = N_{\tau^n}^n. \tag{3.34}$$

Ainsi, $\int_t^{\tau^n} dN_r^n = \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} dN_r^n$.Donc, (Y^n, Z^n, N^n) vérifie l'équation (3.31).

Reste à montrer que $(Y^n, Z^n, N^n) \in \mathcal{S}^{2,n} \times \mathcal{M}^{2,n} \times \mathcal{H}_0^{2,n}$.
- $\mathbb{E}[\sup_t |Y^n_{t\wedge\tau^n}|^2] < +\infty$ d'après le début de la preuve du lemme. Aussi, $Y^n \in \mathcal{S}^{2,n}$.
- Ensuite, comme les processus N^n et $W^n_{.\wedge\tau^n}$ sont orthogonaux, on a

$$< \int_0^{.\wedge\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N^n + Y_0^n >_t = \int_0^{t\wedge\tau^n} |Z_r^n|^2 d < W^n >_r + < N^n >_t .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} |Z^n_{r\wedge\tau^n}|^2 d < W^n >_r + < N^n >_{T_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} |Z^n_r|^2 d < W^n >_r + < N^n >_{T_n}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[< \int_0^{.\wedge\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N^n + Y_0^n >_{T_n}\right] \\
&\leqslant c\,\mathbb{E}\left[\sup_t \left|\int_0^{.\wedge\tau^n} Z_r^n dW_r^n + N^n + Y_0^n\right|^2\right] \\
&\qquad \text{d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy} \\
&\leqslant c\,\mathbb{E}\left[\left(|\xi^n| + \int_0^{\tau^n} |f^n(r, U_{r-}, V_r)| d < W^n >_r\right)^2\right] \quad \text{d'après (3.32) et (3.33)} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $Z^n \in \mathcal{M}^{2,n}$.
- Enfin, N^n est une martingale de carré intégrable par construction et $N_0^n = 0$ d'après (3.32) et (3.33). Donc $N^n \in \mathcal{H}_0^{2,n}$.
Le lemme 3.3.1 est donc prouvé. □

On a la même estimation a priori que dans la proposition 7 dans [11] :

Proposition 3.3.2 *Soit* (Y^n, Z^n, N^n) *(resp.*(Y'^n, Z'^n, N'^n)*) la solution de l'équation (3.31) associée à* $(\xi^n, U, V) \in L^2(\mathcal{F}^n_{\tau^n}) \times \mathcal{S}^{2,n} \times \mathcal{M}^{2,n}$ *(resp.* (ξ'^n, U', V')*). Sous les hypothèses du lemme 3.3.1, on a, pour* $0 \leqslant \sigma \leqslant \mu \leqslant T_n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu} |\delta Y_t^n|^2 + \int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} |\delta Z_r^n|^2 d < W^{n,\tau^n} >_r + < \delta N^{n,\tau^n} >_\mu - < \delta N^{n,\tau^n} >_\sigma\right] \\
&\leqslant 28\mathbb{E}[|\delta Y_\mu^n|^2] \\
&\quad +56K^2 \\
&\qquad \mathbb{E}\left[C(\mu\wedge\tau^n - \sigma\wedge\tau^n, a_n)\left(\sup_{\sigma\wedge\tau^n\leqslant t\leqslant\mu\wedge\tau^n} |\delta U_t|^2 + \int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} |\delta V_r|^2 d < W^n >_r\right)\right],
\end{aligned}$$

où $C(r, a_n) = \max\{(r + 2a_n)^2, r + 2a_n\}$ *et* $\delta Z = Z - Z'$.

Démonstration
Soit $0 \leqslant \sigma \leqslant \mu \leqslant T_n$.

On va d'abord donner une estimation de $\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu}|\delta Y^n_{t\wedge\tau^n}|^2\right]$.
Par définition de (Y^n, Z^n, N^n) et (Y'^n, Z'^n, N'^n), on a :

$$Y^n_t = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, U_{r-}, V_r)d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z^n_r dW^n_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} dN^n_r,$$

$$Y'^n_t = \xi'^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, U'_{r-}, V'_r)d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z'^n_r dW^n_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} dN'^n_r.$$

En soustrayant ces deux équations, il vient :

$$\begin{aligned}\delta Y^n_t &= (\xi^n - \xi'^n) + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n}[f^n(r, U_{r-}, V_r) - f^n(r, U'_{r-}, V'_r)]d < W^n >_r \\ &\quad - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n}\delta Z^n_r dW^n_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} d\delta N^n_r.\end{aligned}$$

Prenant $t = \mu$, on a :

$$\begin{aligned}\delta Y^n_\mu &= (\xi^n - \xi'^n) + \int_{\mu\wedge\tau^n}^{\tau^n}[f^n(r, U_{r-}, V_r) - f^n(r, U'_{r-}, V'_r)]d < W^n >_r \\ &\quad - \int_{\mu\wedge\tau^n}^{\tau^n}\delta Z^n_r dW^n_r - \int_{\mu\wedge\tau^n}^{\tau^n} d\delta N^n_r.\end{aligned}$$

La différence entre ces deux équations donne :

$$\begin{aligned}\delta Y^n_t &= \delta Y^n_\mu + \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}[f^n(r, U_{r-}, V_r) - f^n(r, U'_{r-}, V'_r)]d < W^n >_r \\ &\quad - \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}\delta Z^n_r dW^n_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} d\delta N^n_r.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\delta Y^n_t &= \mathbb{E}[\delta Y^n_t|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t] \\ &= \mathbb{E}\left[\delta Y^n_\mu + \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}[f^n(r, U_{r-}, V_r) - f^n(r, U'_{r-}, V'_r)]d < W^n >_r \Big|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t\right] \\ &\quad -\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}\delta Z^n_r dW^n_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} d\delta N^n_r\Big|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\delta Y^n_\mu + \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}[f^n(r, U_{r-}, V_r) - f^n(r, U'_{r-}, V'_r)]d < W^n >_r \Big|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t\right] \\ &\quad \text{par propriété de martingale.}\end{aligned}$$

Alors, pour tout $0 \leqslant t \leqslant \mu$,

$$\begin{aligned}|\delta Y^n_t| &\leqslant \mathbb{E}\left[|\delta Y^n_\mu| + \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|f^n(r, U_{r-}, V_r) - f^n(r, U'_{r-}, V'_r)|d < W^n >_r \Big|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t\right] \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[|\delta Y^n_\mu| + \int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}\gamma(|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|)d < W^n >_r \Big|\mathcal{F}^{n,\tau^n}_t\right] \\ &\quad \text{car } f^n \text{ est } \gamma\text{-lipschitzienne d'après (Hfn).}\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu}|\delta Y_t^n|^2\right]\\
&\leqslant \quad 4\mathbb{E}\left[\left(\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu}|\delta Y_t^n|\right)^2\right] \quad \text{d'après l'inégalité de Doob}\\
&\leqslant \quad 4\mathbb{E}\left[\left(|\delta Y_\mu^n|+\gamma\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}(|\delta U_{r-}|+|\delta V_r|)d<W^n>_r\right)^2\right]. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Donnons maintenant une estimation de

$$\mathbb{E}\left[\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|\delta Z_{r\wedge\tau^n}^n|^2 d<W^{n,\tau^n}>_r+<\delta N^{n,\tau^n}>_\mu-<\delta N^{n,\tau^n}>_\sigma\right].$$

Comme W^{n,τ^n} et δN^n sont orthogonaux,

$$\begin{aligned}
<\int_0^{.\wedge\tau^n}\delta Z_r^n dW_r^n+\delta N^n>_t &= <\int_0^{.\wedge\tau^n}\delta Z_r^{n,\tau^n}dW_r^{n,\tau^n}+\delta N^n>_t\\
&= \int_0^{t\wedge\tau^n}|\delta Z_r^{n,\tau^n}|d<W^{n,\tau^n}>_r+<\delta N^n>_t\\
&= \int_0^{t\wedge\tau^n}|\delta Z_r^n|d<W^{n,\tau^n}>_r+<\delta N^{n,\tau^n}>_t\\
&\qquad \text{car d'après (3.34) } \delta N^n=\delta N^{n,\tau^n}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[<\int_0^{.\wedge\tau^n}\delta Z_r^n dW_r^n+\delta N^{n,\tau^n}>_\mu-<\int_0^{.\wedge\tau^n}\delta Z_r^n dW_r^n+\delta N^{n,\tau^n}>_\sigma\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|\delta Z_r^n|d<W^{n,\tau^n}>_r+<\delta N^{n,\tau^n}>_\mu-<\delta N^{n,\tau^n}>_\sigma\right] \qquad (3.36)\\
&= \mathbb{E}\left[\left|\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}\delta Z_r^n dW_r^{n,\tau^n}+\delta N_{\mu\wedge\tau^n}^n-\delta N_{\sigma\wedge\tau^n}^n\right|^2\right].
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}\delta Z_r^n dW_r^{n,\tau^n}+\delta N_{\mu\wedge\tau^n}^n-\delta N_{\sigma\wedge\tau^n}^n\right|\\
&= \left|\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}[f^n(r,U_{r-},V_r)-f^n(r,U'_{r-},V'_r)]d<W^n>_r+\delta Y_{\mu\wedge\tau^n}^n-\delta Y_{\sigma\wedge\tau^n}^n\right|\\
&\leqslant \int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|f^n(r,U_{r-},V_r)-f^n(r,U'_{r-},V'_r)|d<W^n>_r+|\delta Y_{\mu\wedge\tau^n}^n|+|\delta Y_{\sigma\wedge\tau^n}^n|\\
&\leqslant \gamma\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}(|\delta U_{r-}|+|\delta V_r|)d<W^n>_r+|\delta Y_{\mu\wedge\tau^n}^n|+|\delta Y_{\sigma\wedge\tau^n}^n| \qquad (3.37)\\
&\qquad \text{car } f^n \text{ est } \gamma\text{-lipschitzienne d'après (Hfn).}
\end{aligned}$$

Aussi,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} |\delta Z^n_{r\wedge\tau^n}|^2 d < W^{n,\tau^n} >_r + < \delta N^{n,\tau^n} >_\mu - < \delta N^{n,\tau^n} >_\sigma\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} \delta Z^n_r dW^{n,\tau^n}_r + \delta N^n_{\mu\wedge\tau^n} - \delta N^n_{\sigma\wedge\tau^n}\right|^2\right] \quad \text{d'après l'inégalité (3.36)} \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\left(\gamma\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} (|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|) d < W^n >_r + |\delta Y^n_\mu| + |\delta Y^n_\sigma|\right)^2\right] \\
&\qquad \text{d'après l'inégalité (3.37)} \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[2\left(\gamma\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} (|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|) d < W^n >_r + |\delta Y^n_\mu|\right)^2 + 2|\delta Y^n_\sigma|^2\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[2\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu} |\delta Y^n_t|^2 + 2\left(\gamma\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} (|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|) d < W^n >_r + |\delta Y^n_\mu|\right)^2\right] \\
&\leqslant 10\mathbb{E}\left[\left(|\delta Y^n_\mu| + \gamma\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} (|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|) d < W^n >_r\right)^2\right] \\
&\qquad \text{d'après l'estimation (3.35).}
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

Finalement,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu} |\delta Y^n_t|^2 + \int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} |\delta Z^n_{r\wedge\tau^n}|^2 d < W^{n,\tau^n} >_r + < \delta N^{n,\tau^n} >_\mu - < \delta N^{n,\tau^n} >_\sigma\right] \\
&\leqslant 14\mathbb{E}\left[\left(|\delta Y^n_\mu| + \gamma\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} (|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|) d < W^n >_r\right)^2\right] \\
&\qquad \text{d'après (3.35) et (3.38)} \\
&\leqslant 28\mathbb{E}\left[|\delta Y^n_\mu|^2\right] + 28\gamma^2\mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} (|\delta U_{r-}| + |\delta V_r|) d < W^n >_r\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Mais,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}(|\delta U_{r-}|+|\delta V_r|)d<W^n>_r\right)^2\right]\\
\leqslant\ & \mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}(|\delta U_{r-}|+|\delta V_r|)^2 d<W^n>_r\right)\left(\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n} d<W^n>_r\right)\right]\\
&\quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz}\\
\leqslant\ & 2\mathbb{E}\Big[\big(<W^n>_{\mu\wedge\tau^n}-<W^n>_{\sigma\wedge\tau^n}\big)^2 \sup_{\sigma\wedge\tau^n\leqslant t\leqslant\mu\wedge\tau^n}|\delta U_{r-}|^2\\
&+\left(<W^n>_{\mu\wedge\tau^n}-<W^n>_{\sigma\wedge\tau^n}\right)\left(\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|\delta V_r|^2 d<W^n>_r\right)\Big]\\
\leqslant\ & 2\mathbb{E}\Bigg[(\mu\wedge\tau^n-\sigma\wedge\tau^n+2a_n)^2\sup_{\sigma\wedge\tau^n\leqslant t\leqslant\mu\wedge\tau^n}|\delta U_{r-}|^2\\
&+(\mu\wedge\tau^n-\sigma\wedge\tau^n+2a_n)\left(\int_{t\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|\delta V_r|^2 d<W^n>_r\right)\Bigg]\\
&\quad \text{d'après l'hypothèse (H1).}
\end{aligned}
$$

Alors, posant $C(r,a_n)=\max\{(r+2a_n)^2, r+2a_n\}$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{\sigma\leqslant t\leqslant\mu}|\delta Y_t^n|^2+\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|\delta Z^n_{r\wedge\tau^n}|^2 d<W^{n,\tau^n}>_r+<\delta N^{n,\tau^n}>_\mu-<\delta N^{n,\tau^n}>_\sigma\right]\\
\leqslant\ & 28\mathbb{E}[\delta Y_\mu^n|^2]\\
&+56\gamma^2\\
&\quad\mathbb{E}\left[C(\mu\wedge\tau^n-\sigma\wedge\tau^n,a_n)\left(\sup_{\sigma\wedge\tau^n\leqslant t\leqslant\mu\wedge\tau^n}|\delta U_t|^2+\int_{\sigma\wedge\tau^n}^{\mu\wedge\tau^n}|\delta V_r|^2 d<W^n>_r\right)\right].
\end{aligned}
$$

D'où la proposition 3.3.2. □

Grâce à cette estimation, on va montrer une propriété d'unicité pour la solution de l'équation (3.31).

Proposition 3.3.3 *Pour n assez grand, la solution de l'équation (3.31) est unique dans $\mathcal{S}^{2,n}\times\mathcal{M}^{2,n}\times\mathcal{H}_0^{2,n}$.*

DÉMONSTRATION
D'après (H1), il existe $r_0>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $r\leqslant r_0$, pour tout $n\geqslant n_0$, $56\gamma^2 C(r,a_n)\leqslant 1/6$.
On prend alors $m_n=\left[\frac{T_n}{r_0}\right]+1$ et on considère la partition régulière de $[0,T_n]$ en m_n intervalles. On pose, pour $0\leqslant k\leqslant m_n-1$, $I_k=\left[\frac{kT_n}{m_n},\frac{(k+1)T_n}{m_n}\right]$ et on introduit la norme

suivante sur $\mathcal{S}^{2,n} \times \mathcal{M}^{2,n} \times \mathcal{H}_0^{2,n}$:

$$\begin{aligned}
&\|(Y^n_{.\wedge\tau^n}, Z^n_{.\wedge\tau^n}, N^n_{.\wedge\tau^n})\|_n^2 \\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^k \mathbb{E}\Bigg[\sup_{t\in I_k} |Y^n_{t\wedge\tau^n}|^2 \\
&\quad + \int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} |Z^n_r|^2 d < W^{n,\tau^n} >_r + \int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} d < N^{n,\tau^n} >_r \Bigg].
\end{aligned}$$

Cette norme est équivalente à la norme usuelle via les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\|(Y^n_{.\wedge\tau^n}, Z^n_{.\wedge\tau^n}, N^n_{.\wedge\tau^n})\|^2 \\
&\qquad \leqslant \|(Y^n_{.\wedge\tau^n}, Z^n_{.\wedge\tau^n}, N^n_{.\wedge\tau^n})\|_n^2 \\
&\qquad\qquad \leqslant m_n (5\times 28)^{m_n-1} \|(Y^n_{.\wedge\tau^n}, Z^n_{.\wedge\tau^n}, N^n_{.\wedge\tau^n})\|^2.
\end{aligned}$$

Grâce à la proposition 3.3.2, pour tout k, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in I_k} |Y^n_{t\wedge\tau^n}|^2 + \int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} |Z^n_r|^2 d < W^{n,\tau^n} >_r + \int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} d < N^{n,\tau^n} >_r\right] \\
&\leqslant \; 28\mathbb{E}[|Y^n_{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n}|^2] \\
&\quad +56K^2\mathbb{E}\left[C\left(\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n - \frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, a_n\right) \sup_{t\in\left[\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, \frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n\right]} |\delta U_{r-}|^2\right] \\
&\quad +56K^2\mathbb{E}\left[C\left(\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n - \frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, a_n\right) \int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} |\delta V_r|^2 d < W^n >_r\right].
\end{aligned}$$

Puis en multipliant par $(5\times 28)^{k-1}$ et en sommant de 0 à $m_n - 1$, il vient pour tout

$n \geqslant n_0$:

$$
\begin{aligned}
&\|(\delta Y^n_{.\wedge\tau^n}, \delta Z^n_{.\wedge\tau^n}, \delta N^n_{.\wedge\tau^n})\|^2_n \\
&\quad \leqslant \; 28 \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^{k-1} \mathbb{E}\left[\left| Y^n_{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n}\right|^2\right] \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^{k-1} \\
&\qquad\qquad \mathbb{E}\left[56\gamma^2 C\left(\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n - \frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, a_n\right) \sup_{t\in\left[\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, \frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n\right]} |\delta U_{r-}|^2\right] \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^{k-1} \\
&\qquad\qquad \mathbb{E}\left[56\gamma^2 C\left(\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n - \frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, a_n\right) \int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} |\delta V_r|^2 d < W^n >_r\right] \\
&\quad \leqslant \; \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^{k} \mathbb{E}\left[\left| Y^n_{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n}\right|^2\right] \\
&\qquad + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^{k-1} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\left[\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n, \frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n\right]} |\delta U_{r-}|^2\right] \\
&\qquad + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{m_n-1} (5\times 28)^{k-1} \mathbb{E}\left[\int_{\frac{kT_n}{m_n}\wedge\tau^n}^{\frac{(k+1)T_n}{m_n}\wedge\tau^n} |\delta V_r|^2 d < W^n >_r\right] \\
&\quad \leqslant \; \frac{1}{5}\|(\delta Y^n_{.\wedge\tau^n}, \delta Z^n_{.\wedge\tau^n}, \delta N^n_{.\wedge\tau^n})\|^2_n + \frac{1}{6}\|(\delta U, \delta V, 0)\|^2_n.
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\|(\delta Y^n_{.\wedge\tau^n}, \delta Z^n_{.\wedge\tau^n}, \delta N^n_{.\wedge\tau^n})\|^2_n \leqslant \frac{1}{5}\|(\delta U, \delta V, 0)\|^2_n.$$

La conclusion de la proposition découle de cette inégalité. □

On peut maintenant prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR (3.30) :

Théorème 3.3.4 *Sous les hypothèses (H1), (H2), (Hf) et (Hfn), l'EDSR (3.30) a, pour n assez grand, une unique solution* $(Y^n_{.\wedge\tau^n}, Z^n_{.\wedge\tau^n}, N^n_{.\wedge\tau^n})$ *dans* $\mathcal{S}^{2,n}\times\mathcal{M}^{2,n}\times\mathcal{H}^{2,n}_0$.

Démonstration

On va utiliser un argument de point fixe. Pour cela, on considère l'application ψ^n de $\mathcal{S}^{2,n}\times\mathcal{M}^{2,n}\times\mathcal{H}^{2,n}_0$ dans lui-même définie par $\psi^n(U,V,L) = (Y^n, Z^n, N^n)$ où (Y^n, Z^n, N^n) est solution de l'équation (3.31). On remarque que $\psi^n(U,V,L)$ ne dépend

pas de L et est bien définie d'après le lemme 3.3.1 et la proposition 3.3.3.
Pour $n \geqslant n_0$, on a vu que

$$\|(\delta Y^n_{.\wedge\tau^n}, \delta Z^n_{.\wedge\tau^n}, \delta N^n_{.\wedge\tau^n})\|_n^2 \leqslant \frac{1}{5}\|(\delta U, \delta V, 0)\|_n^2.$$

Donc ψ^n est une contraction de l'espace de Banach $\mathcal{S}^{2,n} \times \mathcal{M}^{2,n} \times \mathcal{H}_0^{2,n}$ muni de la norme $\|.\|_n$.
Le théorème du point fixe permet de conclure. □

Comme dans la section 3.2, on va maintenant prouver une propriété de bornitude du processus Y^n.

Proposition 3.3.5 *Y^n est presque sûrement borné par $\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}$.*

Démonstration
Soit $\theta \geqslant 0$. On définit les processus suivants :

$$\alpha^n_s = \begin{cases} \frac{f^n(s,Y^n_s,Z^n_s) - f^n(s,0,Z^n_s)}{Y^n_s} & \text{si } Y^n_s \neq 0 \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad R^n_t = exp\left(\int_{\theta\wedge\tau^n}^t \alpha^n_s d < W^n >_s\right).$$

La formule d'Itô appliquée à $R^n_t Y^n_t$ donne

$$\begin{aligned} d(R^n_t Y^n_t) &= \alpha^n_t R^n_t Y^n_t d < W^n >_t \\ &\quad + R^n_t \left(-\left(\alpha^n_t Y^n_t + f^n(t,0,Z^n_t)\right) d < W^n >_t + Z^n_t dW^n_t + dN^n_t\right) \\ &= -f^n(t,0,Z^n_t) R^n_t d < W^n >_t + Z^n_t R^n_t dW^n_t + R^n_t dN^n_t. \end{aligned}$$

En intégrant entre $\theta \wedge \tau^n$ et τ^n et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}^n_{\theta\wedge\tau^n}$, il vient :

$$\begin{aligned} |Y^n_{\tau\wedge\theta^n}| &= |\mathbb{E}[Y^n_{\tau^n\wedge\theta}|\mathcal{F}^n_{\theta\wedge\tau^n}]| = |\mathbb{E}[R^n_{\tau^n\wedge\theta} Y^n_{\tau^n\wedge\theta}|\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau^n}]| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[R^n_\tau Y^n_{\tau^n} + \int_{\theta\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(t,0,Z^n_t) R^n_t d < W^n >_t \Big| \mathcal{F}^n_{\theta\wedge\tau^n}\right]\right| \\ &\qquad \text{par propriété de martingale} \\ &\leqslant \mathbb{E}[|R^n_{\tau^n} Y^n_{\tau^n}|\ |\mathcal{F}^n_{\theta\wedge\tau^n}] + \mathbb{E}\left[\int_{\theta\wedge\tau^n}^{\tau^n} |f^n(t,0,Z^n_t) R^n_t| d < W^n_t > \Big| \mathcal{F}^n_{\theta\wedge\tau^n}\right]. \end{aligned}$$

Or, par construction, pour tout t, $R^n_t \leqslant e^{-\mu(<W^n>_t - <W^n>_{\theta\wedge\tau^n})}$. Ainsi, en particulier, $R^n_{\tau^n} \leqslant 1$ et

$$\begin{aligned} \int_{\theta\wedge\tau^n}^{\tau^n} |f^n(t,0,Z^n_t) R^n_t| d < W^n >_t &\leqslant \|f^n\|_\infty e^{\mu<W^n>_{\theta\wedge\tau^n}} \int_{\theta\wedge\tau^n}^{\tau^n} e^{-\mu<W^n>_t} d < W^n_t > \\ &\leqslant \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}. \end{aligned}$$

Finalement, on a donc

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |Y^n_t| \leqslant \|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}.$$

□

3.3.3 Convergence des solutions

Nous allons maintenant nous intéresser à la convergence des solutions des EDSR.

On va faire des hypothèses de convergence sur les générateurs f et f^n.

(H3) $\forall (y,z)$, $\{f^n(t,y,z)\}_t$ a des trajectoires càdlàg et $f^n(.,y,z) \xrightarrow{\mathcal{S}^2_L} f(.,y,z)$, $\forall L$.

Le but de ce qui suit est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.3.6 *On suppose que (H1), (H2), (H3), (Hf) et (Hfn) sont vérifiées. On note (Y^n, Z^n, N^n) la solution de l'équation (3.30) et (Y,Z) celle de l'équation (3.29). Alors,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|Y^n_t - Y_t|^2 + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|N^n_t|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

$$\forall L,\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,L]}\left|\int_0^t Z^n_s dW^n_s - \int_0^t Z_s dW_s\right|\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration

Pour tout $K\in\mathbb{N}$, on note (Y^K, Z^K) et $(Y^{n,K}, Z^{n,K})$ les solutions des EDSR suivantes : pour tout $t \geqslant 0$,

$$Y^K_{t\wedge\tau\wedge K} = \xi \mathbf{1}_{\tau\leqslant K} + \int_{t\wedge\tau\wedge K}^{\tau\wedge K} f(s, Y^K_s, Z^K_s)ds - \int_{t\wedge\tau\wedge K}^{\tau\wedge K} Z^K_s dW_s, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} Y^{n,K}_t &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n\leqslant K} + \int_{t\wedge\tau^n\wedge K}^{\tau^n\wedge K} f(s, Y^{n,K}_{s-}, Z^{n,K}_s) d < W^n >_s \\ &\quad - \int_{t\wedge\tau^n\wedge K}^{\tau^n\wedge K} Z^{n,K}_s dW^n_s + \int_{t\wedge\tau^n\wedge K}^{\tau^n\wedge K} dN^{n,K}_s. \end{aligned} \tag{3.40}$$

On va montrer successivement les convergences suivantes :

$$\forall K,\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|Y^{n,K}_t - Y^K_t|^2 + \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left|\int_0^t Z^{n,K}_s dW^n_s - \int_0^t Z^K_s dW_s\right| + \sup_{t\in\mathbb{R}^+}|N^{n,K}_t|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \tag{3.41}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}\left|Y_t - Y^K_t\right| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\left|Z_s - Z^K_s\right|^2 ds\right] \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0, \tag{3.42}$$

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}\left|Y^n_t - Y^{n,K}_t\right|^2 + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\left|Z^n_s - Z^{n,K}_s\right|^2 d < W^n >_s + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|\delta N^n_t|^2\right] \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0. \tag{3.43}$$

Ces trois convergences permettront de prouver le théorème via les inégalités de Burkholder pour la convergence des intégrales stochastiques sur les compacts comme cela a été fait dans la preuve de la deuxième convergence du théorème 3.2.5.

• Pour commencer, montrons la convergence (3.41).
On réécrit les équations (3.39) et (3.40) sous la forme suivante : $\forall t \in [0, K]$,

$$\begin{aligned} Y_t^K &= \xi \mathbf{1}_{\tau \leqslant K} + \int_t^K f(s, Y_s^K, Z_s^K)\mathbf{1}_{s \leqslant \tau} ds - \int_t^K Z_s^K dW_s, \\ Y_t^{n,K} &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n \leqslant K} + \int_t^K f(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s \leqslant \tau^n} d < W^n >_s \\ &\quad - \int_t^K Z_s^{n,K} dW_s^n + \int_t^K dN_s^{n,K}. \end{aligned}$$

On se ramène ainsi à des équations à horizon déterministe K. En appliquant les résultats de Briand, Delyon et Mémin dans [11], on a alors la convergence cherchée :

$$\forall K,\ \mathbb{E}\left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |Y_t^{n,K} - Y_t^K|^2 + \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left| \int_0^t Z_s^{n,K} dW_s^n - \int_0^t Z_s^K dW_s \right| + \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |N_t^{n,K}|^2 \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

• Grâce aux inégalités (3.10) et (3.12) prouvées dans la section 3.2, on a la convergence (3.42) à savoir :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{-\mu t} \left| Y_t - Y_t^K \right| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s} \left| Z_s - Z_s^K \right|^2 ds \right] \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0.$$

• Pour finir, montrons la convergence (3.43), *i.e.*

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{-2\mu t} \left| Y_t^n - Y_t^{n,K} \right|^2 + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s} \left| Z_s^n - Z_s^{n,K} \right|^2 d < W^n >_s + \sup_{t \in \mathbb{R}^+} e^{-2\mu t} |\delta N_t^n|^2 \right] \xrightarrow[K \to +\infty]{} 0.$$

Notant $\delta Y^n = Y^n - Y^{n,K}$, $\delta Z^n = Z^n - Z^{n,K}$ et $\delta N^n = N^n - N^{n,K}$, on a pour tout $t \in [0, K]$

$$\begin{aligned} \delta Y_{t \wedge \tau}^n &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n > K} + \int_{t \wedge \tau^n}^{\tau^n} (f^n(s, Y_{s-}^n, Z_s^n) - f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s \leqslant K}) d < W^n >_s \\ &\quad - \int_{t \wedge \tau^n}^{\tau^n} \delta Z_s^n dW_s^n + \int_{t \wedge \tau^n}^{\tau^n} d(\delta N_s^n). \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$f^n(s, Y_{s-}^n, Z_s^n) - f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s \leqslant K} = \alpha_s^{n,K} \delta Y_{s-}^n + \beta_s^{n,K} \delta Z_s^n + f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s > K}$$

avec

$$\alpha_s^{n,K} = \begin{cases} \frac{f^n(s, Y_{s-}^n, Z_s^n) - f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^n)}{\delta Y_{s-}^n} & \text{si } \delta Y_{s-}^n \neq 0, \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\beta_s^{n,K} = \begin{cases} \frac{f^n(s, Y_{s-}^n, Z_s^n) - f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})}{\delta Z_s^n} & \text{si } \delta Z_s^n \neq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\theta \in [0, K]$. On pose

$$R_t^{n,K} = exp\left(\int_{\theta\wedge\tau}^t \alpha_s^{n,K} d < W^n >_s\right) \quad \text{et} \quad W_t^{n,K} = W_t^n - \int_0^t \beta_s^{n,K} d < W^n >_s .$$

On note $\mathbb{P}^{n,K}$ la probabilité obtenue en appliquant le théorème de Girsanov. $W^{n,K}$ est une $\mathcal{F}^{n,\tau^n}$-martingale sous $\mathbb{P}^{n,K}$. Avec les notations introduites, on a

$$\begin{aligned}
\delta Y_{t\wedge\tau^n}^n &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n > K} + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} (\alpha_s^{n,K} \delta Y_{s-}^n + f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K}) \mathbf{1}_{s>K}) d < W^n >_s \\
&\quad - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} \delta Z_s^n dW_s^{n,K} + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} d(\delta N_s^n).
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $R_t^{n,K} \delta Y_t^n$ et on intègre entre $\theta \wedge \tau^n$ et τ^n. Alors,

$$\begin{aligned}
\delta Y_{\theta\wedge\tau^n}^n &= R_{\tau^n}^{n,K} \delta Y_{\tau^n}^n + \int_{\theta\wedge\tau^n}^{\tau^n} R_s^{n,K} f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K}) \mathbf{1}_{s>K} d < W^n >_s \\
&\quad - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} R_s^{n,K} \delta Z_s^n dW_s^{n,K} + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} R_s^{n,K} d(\delta N_s^n).
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau^n}^n$ sous la probabilité $\mathbb{P}^{n,K}$, on a

$$|\delta Y_{\theta\wedge\tau^n}^n| \leqslant \mathbb{E}[R_{\tau^n}^{n,K} |\delta Y_{\tau^n}^n| \, |\mathcal{F}_{\theta\wedge\tau^n}^n] + \mathbb{E}\left[\int_{K\wedge\tau^n}^{\tau^n} R_s^{n,K} |f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})| d < W^n >_s \middle| \mathcal{F}_{\theta\wedge\tau^n}^n\right].$$

Or, pour tout t, $R_t^{n,K} \leqslant e^{-\mu(<W^n>_t - <W^n>_{\theta\wedge\tau^n})} \leqslant e^{-\mu(t-(\theta\wedge\tau^n))} e^{2\mu a_n}$ d'après (H1). Donc, en particulier,

$$R_{\tau^n}^{n,K} |\delta Y_{\tau^n}^n| = R_{\tau^n}^{n,K} |\xi^n| \mathbf{1}_{\tau^n > K} \leqslant \|\xi^n\|_\infty e^{2\mu a_n} e^{-\mu(K-(\theta\wedge\tau^n))}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\int_{K\wedge\tau^n}^{\tau^n} R_s^{n,K} |f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})| d < W^n >_s \\
&\leqslant \|f^n\|_\infty e^{\mu <W^n>_{\theta\wedge\tau^n}} \int_{K\wedge\tau^n}^{\tau^n} e^{-\mu <W^n>_t} d < W^n >_t \\
&\leqslant \|f^n\|_\infty \frac{e^{-\mu(<W^n>_K - <W^n>_{\theta\wedge\tau^n})}}{\mu} \\
&\leqslant \|f^n\|_\infty \frac{e^{2\mu a_n}}{\mu} e^{-\mu(t-(\theta\wedge\tau^n))}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a donc :

$$\forall \theta \in [0, K], \ |Y_{\theta\wedge\tau^n}^n - Y_{\theta\wedge\tau^n}^{n,K}| \leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right) e^{2\mu a_n} e^{-\mu(K-(\theta\wedge\tau^n))}. \tag{3.44}$$

Donnons un majorant de $\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right]$.
On écrit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n\wedge K} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\tau^n\wedge K}^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right].
\end{aligned}$$

En utilisant la majoration (3.44) et la propriété (H1), on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n\wedge K} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n\wedge K} e^{-2\mu<W^n>_s}\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{-2\mu(<W^n>_K - <W^n>_s)} d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant <W^n>_K \left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{-2\mu<W^n>_K} \\
&\leqslant (K+a_n)\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{2\mu a_n} e^{-2\mu K}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}\left[\int_{\tau^n\wedge K}^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{K<\tau^n}\int_K^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right].$$

Or, d'après la proposition 3.3.5, on peut majorer $|Y_t^{n,K}|$ et $|Y_t^n|$ par $\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}$ pour tout t. Alors,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_{\tau^n\wedge K}^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant 4\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2 \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{K<\tau^n}\int_K^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s} d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant \frac{2}{\mu}\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{2\mu a_n} e^{-2\mu K}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a la majoration suivante :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \leqslant \left(K + a_n + \frac{2}{\mu}\right)\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2 e^{2\mu a_n} e^{-2\mu K}. \tag{3.45}$$

Montrons que $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|Z_s^n - Z_s^{n,K}|^2 ds\right] \to 0$ quand $[K \to +\infty]$.
On rappelle que, avec les notations définies plus haut, on a :

$$\begin{aligned}
\delta Y_{t\wedge\tau^n}^n &= \xi^n \mathbf{1}_{\tau^n > K} + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} (\alpha_s^{n,K}\delta Y_{s-}^n + \beta_s^{n,K}\delta Z_s^n + f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s>K}) d<W^n>_s \\
&\quad - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} \delta Z_s^n dW_s^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} d(\delta N_s^n).
\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2$.

$$
\begin{aligned}
&d(e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2) = \\
&\quad -2\mu e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s \\
&\qquad +2e^{-2\mu<W^n>_s}\delta Y_s^n \left(-\left(\alpha_s^{n,K}\delta Y_{s-}^n + \beta_s^{n,K}\delta Z_s^n + f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s>K}\right) d<W^n>_s\right) \\
&\qquad\ +2e^{-2\mu<W^n>_s}\delta Y_s^n\left(\delta Z_s^n dW_s^n + d(\delta N_s^n)\right) \\
&\qquad\quad +e^{-2\mu<W^n>_s}(|\delta Z_s^n|^2 d<W^n>_s + d<\delta N^n>_s).
\end{aligned}
$$

En intégrant entre 0 et τ^n, puis en prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}$, il vient

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Z_s^n|^2 d<W^n>_s + \int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s} d<\delta N^n>_s\right] \\
&= \ \mathbb{E}\left[e^{-2\mu<W^n>_{\tau^n}}|\xi^n|^2\mathbf{1}_{\tau^n>K}\right] - \mathbb{E}[e^{-2\mu<W^n>_0}|\delta Y_0^n|^2] \\
&\quad +2\mu\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}\alpha_s^{n,K}(\delta Y_s^n)^2 d<W^n>_s\right] \\
&\quad -2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}\delta Y_s^n\left(\beta_s^{n,K}\delta Z_s^n + f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s>K}\right) d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant \ \mathbb{E}\left[e^{-2\mu<W^n>_{\tau^n}}|\xi^n|^2\mathbf{1}_{\tau^n>K}\right] - \mathbb{E}[e^{-2\mu<W^n>_0}|\delta Y_0^n|^2] \\
&\quad +\left|2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}\delta Y_s^n\left(\beta_s^{n,K}\delta Z_s^n + f^n(s, Y_{s-}^{n,K}, Z_s^{n,K})\mathbf{1}_{s>K}\right) d<W^n>_s\right]\right| \\
&\quad \text{car } f^n \text{ est monotone (donc } \alpha_s^{n,K}(\delta Y_s^n)^2 \leqslant -\mu|\delta Y_s^n|^2) \\
&\leqslant \ \mathbb{E}\left[e^{-2\mu<W^n>_{\tau^n}}|\xi^n|^2\mathbf{1}_{\tau^n>K}\right] \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}\left(|\beta_s^{n,K}\delta Z_s^n|\ |\delta Y_s^n| + |f^n(s, Y_s^{n,K}, Z_s^{n,K})|\ |\delta Y_s^n|\mathbf{1}_{s>K}\right) d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant \ e^{-2\mu K}e^{2\mu a_n}\|\xi^n\|_\infty + 2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}\gamma|\delta Z_s^n|\ |\delta Y_s^n| d<W^n>_s\right] \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\int_K^{\tau^n} \|f^n\|_\infty e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n| d<W^n>_s\right] \\
&\leqslant \ e^{-2\mu K}e^{2\mu a_n}\|\xi^n\|_\infty + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Z_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \\
&\quad +2\gamma^2\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\int_K^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right] + \|f^n\|_\infty^2\mathbb{E}\left[\int_K^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s} d<W^n>_s\right] \\
&\quad \text{car } \forall\varepsilon > 0,\ 2ab \leqslant \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Z_s^n|^2 d<W^n>_s + \int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s} d<\delta N^n>_s\right]$$
$$\leqslant\ e^{-2\mu K}e^{2\mu a_n}\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty^2}{2\mu}\right) + (2\gamma^2+1)\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Y_s^n|^2 d<W^n>_s\right]$$
$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^n} e^{-2\mu<W^n>_s}|\delta Z_s^n|^2 d<W^n>_s\right].$$

Finalement, en utilisant la majoration (3.45), la propriété (H1) sur les variations quadratiques, le fait que $Z^n = Z^{n,K} = 0$ sur $\{t \geqslant \tau^n\}$ et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}|\delta Z_s|^2 d<W^n>_s + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|\delta N_t^n|^2\right]$$
$$\leqslant\ C\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty^2}{2\mu} + (2\gamma^2+1)\left(K+\frac{2}{\mu}\right)\left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)^2\right)$$
$$\times 2e^{4\mu a_n}e^{-2\mu K} \tag{3.46}$$

où C est une constante universelle.

En prouvant la majoration (3.44), on a en particulier montré que, pour tout θ,

$$e^{-\mu(\theta\wedge\tau^n)}|Y_{\theta\wedge\tau^n}^n - Y_{\theta\wedge\tau^n}^{n,K}| \leqslant \left(\|\xi^n\|_\infty + \frac{\|f^n\|_\infty}{\mu}\right)e^{2\mu a_n}e^{-\mu K}.$$

Aussi,

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}\left|Y_t^n - Y_t^{n,K}\right|\right] \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0. \tag{3.47}$$

D'après la convergence (3.47) et l'inégalité (3.46), on a la convergence (3.43) :

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\mu t}\left|Y_t^n - Y_t^{n,K}\right| + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\left|Z_s^n - Z_s^{n,K}\right|^2 d<W^n>_s + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|\delta N_t^n|^2\right]$$
$$\xrightarrow[K\to+\infty]{} 0.$$

Le théoème 3.3.6 est alors prouvé. □

3.3.4 Application au cas des discrétisés

Dans cette partie, on s'intéresse au cas particulier de l'approximation du mouvement brownien W par des discrétisés W^n. Plus précisément, on considère une suite croissante $(\pi^n = \{t_k^n\})_n$ de subdivisions de $\mathbb{R}^+$ de pas tendant vers 0 et les processus discrétisés W^n définis par $W_{t\wedge\tau^n}^n = W_{t_k^n}$ si $t_k^n \leqslant t\wedge\tau^n < t_{k+1}^n$.

Soit (a^n) une suite de réels positifs décroissant vers a. On considère les variables aléatoires suivantes :

$$\tau = \inf\{t > 0 : |W_t| > a\} \quad \text{et} \quad \tau^n = \inf\{t \in]0,n] : |W_t^n| > a^n\} \wedge n.$$

Comme précédemment, on note $\mathcal{F}$ la filtration engendrée par W et $\mathcal{F}^n$ celles engendrées par les processus W^n. Il est clair que (W^n) est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-martingales, τ est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt et $(\tau^n)_n$ est une suite de $(\mathcal{F}^n)$-temps d'arrêt.

En raisonnant exactement comme dans la partie 1.2.1, on montre la convergence $\tau^n \xrightarrow{p.s.} \tau$.

D'autre part, on sait que $\sup_t |W_t^n - W_t| \xrightarrow{p.s.} 0$. De plus, les processus sont bornés sur tous les intervalles compacts. Donc, pour tout L, la convergence a lieu dans $\mathcal{S}_L^2$, ie $W^n \xrightarrow{\mathcal{S}_L^2} W$. Enfin, on notera que $< W^n >$ est le processus discrétisé de $< W >$. Alors, $| < W^n >_t -t| \leqslant |\pi_n|$ où $|\pi_n|$, le pas de la subdivision, tend vers 0.
L'hypothèse (H1) est donc satisfaite.

Pour finir, on considère des conditions terminales ξ et (ξ^n) ainsi que des générateurs f et (f^n) satisfaisant les conditions (Hf), (Hfn), (H2) et (H3).

Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_r dW_r, \ \forall t \geqslant 0,$$

et (Y^n, Z^n, N^n) la solution de l'EDSR

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, Y_{r-}^n, Z_r^n)d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - (N_{\tau^n}^n - N_{t\wedge\tau^n}^n), t \geqslant 0.$$

Ces solutions existent et sont uniques dans certains espaces comme on l'a vu dans la section 3.3.2.

Les hypothèses du théorème 3.3.6 sont satisfaites. On a donc les convergences indiquées dans le théorème. De plus, $< W^{n,\tau^n} >=< W^n >^{\tau^n}$, d'après le lemme suivant :

Lemme 3.3.7 *Soit M une $\mathcal{F}$-martingale et τ un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt. On a alors l'égalité suivante : $< M >_\tau =< M^\tau >$.*

Comme $< W >= Id$, $< W^n >$ est son discrétisé : $< W^n >_t = t_i^n$ si $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$. Donc $< W^{n,\tau^n} >$ est le discrétisé de $< W^\tau >$. Alors, par un raisonnement analogue à celui de la preuve du corollaire 3.2 dans Briand, Delyon et Mémin [10], on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} e^{-2\mu t} |Z_t^n - Z_t|^2 dr\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement, on a la convergence suivante des solutions :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|Y_t^n - Y_t|^2 + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t}|Z_t^n - Z_t|^2 dt + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|N_t^n|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On a prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.3.8 *Soit $(\pi^n = \{t_k^n\})_n$ une suite croissante de subdivisions de $\mathbb{R}^+$ de pas tendant vers 0 et les processus discrétisés de W associés W^n. Soit (a^n) une suite de réels décroissant vers a. On considère les temps d'arrêt*

$$\tau = \inf\{t > 0 : |W_t| > a\} \quad et \quad \tau^n = \inf\{t \in]0, n] : |W_t^n| > a^n\} \wedge n.$$

Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR

$$Y_{t\wedge\tau} = \xi + \int_{t\wedge\tau}^{\tau} f(r, Y_r, Z_r) dr - \int_{t\wedge\tau}^{\tau} Z_r dW_r, \ \forall t \geqslant 0,$$

et (Y^n, Z^n, N^n) la solution de l'EDSR

$$Y_t^n = \xi^n + \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} f^n(r, Y_{r-}^n, Z_r^n) d < W^n >_r - \int_{t\wedge\tau^n}^{\tau^n} Z_r^n dW_r^n - (N_{\tau^n}^n - N_{t\wedge\tau^n}^n), t \geqslant 0.$$

On suppose que les conditions (Hf), (Hfn), (H2) et (H3) sont satisfaites. Alors on a la convergence suivante des solutions :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|Y_t^n - Y_t|^2 + \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t}|Z_t^n - Z_t|^2 dt + \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-2\mu t}|N_t^n|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Bilan et perspectives

Ma thèse donne certaines réponses à des questions de stabilité de problèmes d'arrêt quand on dispose d'une information approximative sur un processus initial. L'étude de la stabilité de problèmes d'arrêt n'est pas achevée pour autant... Après avoir fait un rapide bilan des innovations apportées, on indiquera quelques pistes de poursuites possibles que ce soit au sujet des convergences de réduites et de temps d'arrêt optimaux ou au sujet des schémas d'approximation d'EDSR à horizon aléatoire.

Concernant la stabilité de solutions d'EDSR à horizon aléatoire, les théorèmes 3.2.5 et 3.3.6 montrent que si (W^n) est une suite de marches aléatoires ou une suite de martingales qui converge vers un mouvement brownien W et si (τ^n) est une suite de temps d'arrêt qui converge vers un temps d'arrêt τ, alors la solution de l'EDSR dirigée par W^n d'horizon τ^n converge vers celle de l'EDSR dirigée par W d'horizon τ. Ces résultats généralisent ceux de Briand, Delyon et Mémin dans [10] et [11] où les équations considérées sont à horizon déterministe.

Dans les équations considérées, le temps d'arrêt τ est supposé fini presque sûrement. On pourrait essayer de relâcher cette hypothèse afin de se rapprocher des hypothèses d'existence et d'unicité de solutions d'EDSR à horizon aléatoire données par Manuela Royer dans [55]. De même, dans les deux approches considérées, le générateur f est supposé lipschitzien en ses deux variables. Là aussi, on pourrait essayer d'affaiblir cette hypothèse en supposant par exemple f lipschitzienne en z et continue en y tout en ayant un contrôle sur la croissance en y. Enfin, les résultats donnés ici ne sont valables qu'en dimension 1. La prochaine étape est d'essayer de les généraliser en dimension supérieure.

Concernant les convergences de réduites, le théorème 2.2.1 repose sur des hypothèses d'inclusion de filtrations ou de convergence de filtrations moins contraignantes que l'hypothèse de convergence étendue figurant dans les résultats d'Aldous dans [2] ou de Lamberton et Pagès dans [37]. Dans le théorème 2.2.1, tous les processus sont définis sur le même espace. Dans ce cadre, il est assez naturel de considérer une convergence en probabilité des suites de processus. Cette convergence est notamment satisfaite dans le cas où on approche un processus par ses discrétisés. D'autre part, il n'y avait jusqu'alors pas de résultat complet sur la convergence des temps d'arrêt optimaux au sens où les résultats existants portaient sur le caractère optimal de la limite d'une suite de temps d'arrêt optimaux et pas sur le fait que cette limite ait la loi d'un temps d'arrêt pour la filtration initiale. Pour appliquer les résultats prouvés à la convergence des réduites et des temps d'arrêt des modèles de Cox, Ross et Rubinstein vers ceux d'un modèle de Black et Scholes, on a approché le mouvement brownien par une suite de marches aléatoires construites par la méthode de Knight.

L'application en finance étudiée porte sur l'approximation d'un modèle dirigé par le mouvement brownien. Il serait intéressant de considérer un modèle un peu plus compliqué, par exemple en faisant intervenir un terme de Poisson. Ce travail amènera peut-être d'une part à déterminer de nouvelles conditions pour que la limite d'une suite de temps d'arrêt soit un temps d'arrêt et d'autre part à étendre les résultats d'approximation du mouvement brownien de la partie 1.3 à d'autres processus. Pour améliorer les résultats de la section 1.2.2 sur les limites de suites de temps d'arrêt dans le cas de convergence de filtrations, il serait souhaitable de pouvoir relâcher l'hypothèse faite sur la mesurabilité de la limite. Concernant l'approximation des processus, il serait intéressant de chercher un analogue de la méthode de Knight pour un processus de Poisson qui n'est pas continu contrairement au mouvement brownien.

On pourrait également essayer de trouver de nouveaux résultats sur les convergences de temps d'arrêt optimaux en considérant l'approche faite avec les enveloppes de Snell. Avec cette approche, le plus petit temps d'arrêt optimal est le premier instant où l'enveloppe de Snell et le processus coïncident. Dans le cas des put américains, Jaillet, Lamberton et Lapeyre ont prouvé dans [28] l'unicité du temps d'arrêt optimal. Par conséquent, le plus petit temps d'arrêt optimal associé au put américain pour le modèle de Cox, Ross et Rubinstein converge vers le plus petit temps d'arrêt optimal pour le modèle de Black et Scholes. Cette approche permettrait peut-être de généraliser cette propriété à d'autres modèles en prouvant que le plus petit temps d'arrêt optimal pour les modèles approchants converge vers le plus petit temps d'arrêt optimal pour le modèle initial. D'autre part, vu la forme des temps d'arrêt optimaux (instant d'entrée dans un fermé), on pourrait obtenir un résultat de convergence en probabilité des suites de temps d'arrêt optimaux au lieu d'une convergence en loi. Pour avoir un tel résultat, une première étape serait de s'intéresser à la convergence en probabilité des enveloppes de Snell.

Bibliographie

[1] D. Aldous. Stopping times and tightness. *Ann. Probability*, 6(2) :335–340, 1978.

[2] D. Aldous. Weak convergence of stochastic processes for processes viewed in the strasbourg manner. Unpublished Manuscript, Statis. Laboratory Univ. Cambridge, 1981.

[3] D. Aldous. Stopping times and tightness. II. *Ann. Probab.*, 17(2) :586–595, 1989.

[4] K. Amin and A. Khanna. Convergence of American option values from discrete-to continuous-time financial models. *Math. Finance*, 4(4) :289–304, 1994.

[5] F. Antonelli and A. Kohatsu-Higa. Filtration stability of backward SDE's. *Stochastic Anal. Appl.*, 18(1) :11–37, 2000.

[6] J.R. Baxter and R.V. Chacon. Compactness of stopping times. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 40 (3) :169–181, 1977.

[7] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures, Second Edition.* Wiley and Sons, New York, 1999.

[8] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.

[9] P. Brémaud and M. Yor. Changes of filtrations and of probability measures. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 45 :269–295, 1978.

[10] P. Briand, B. Delyon, and J. Mémin. Donsker-type theorem for BSDEs. *Electron. Comm. Probab.*, 6 :1–14 (electronic), 2001.

[11] P. Briand, B. Delyon, and J. Mémin. On the robustness of backward stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.*, 97(2) :229–253, 2002.

[12] P. Briand and Y. Hu. Stability of BSDEs with random terminal time and homogenization of semilinear elliptic PDEs. *J. Funct. Anal.*, 155(2) :455–494, 1998.

[13] F. Coquet, V. Mackevičius, and J. Mémin. Stability in **D** of martingales and backward equations under discretization of filtration. *Stochastic Process. Appl.*, 75(2) :235–248, 1998.

[14] F. Coquet, V. Mackevičius, and J. Mémin. Corrigendum to : "Stability in **D** of martingales and backward equations under discretization of filtration". *Stochastic Process. Appl.*, 82(2) :335–338, 1999.

[15] F. Coquet, J. Mémin, and V. Mackevičius. Quelques exemples et contre-exemples de convergences de tribus ou de filtrations. *Liet. Mat. Rink.*, 40(3) :295–306, 2000.

[16] F. Coquet, J. Mémin, and L. Słomiński. On weak convergence of filtrations. *Séminaire de probabilités XXXV, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York*, 1755 :306–328, 2001.

[17] J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing : A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 1979.

[18] C. Dellacherie and P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel, Chapitres V à VIII, Théorie des martingales.* Hermann, Paris, 1980.

[19] D. Duffie and P. Protter. From discrete to continuous time finance : weak convergence of the financial gain process. *Mathematical Finance*, 2(1) :1–15, 1992.

[20] P. Dupuis and H. Wang. On the convergence from discrete to continuous time in an optimal stopping problem. *Ann. Appl. Probab.*, 15(2) :1339–1366, 2005.

[21] J. Haezendonck and F. Delbaen. Caractérisation de la tribu des événements antérieurs à un temps d'arrêt pour un processus stochastique. *Acad. Roy. Belg., Bulletin de la Classe Scientifique*, 56 (5) :1085–1092, 1970.

[22] D.N. Hoover. Convergence in distribution and Skorokhod convergence for the general theory of processes. *Probab. Theory Related Fields*, 89(3) :239–259, 1991.

[23] K. Itô and H.P. McKean Jr. *Diffusion processes and their sample paths.* Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.

[24] J. Jacod. Calcul stochastique et problèmes de martingales. *Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin*, 714, 1979.

[25] J. Jacod and J. Mémin. Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité. *Séminaire de Probabilités, XV, Lectures Notes in Mathematics, Springer, Berlin*, 850 :529–546, 1981.

[26] J. Jacod and P. Protter. A remark on the weak convergence of processes in the Skorohod topology. *J. Theoret. Probab.*, 6(3) :463–472, 1993.

[27] J. Jacod and A.N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1987.

[28] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. Variational inequalities and the pricing of american options. *Acta Appl. Math.*, 21(3) :263–289, 1990.

[29] A. Jakubowski, J. Mémin, and G. Pagès. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbf{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields*, 81(1) :111–137, 1989.

[30] M. Kac. Random walk and the theory of Brownian motion. *Amer. Math. Monthly*, 54 :369–391, 1947.

[31] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability, Second Edition.* Springer Verlag, New York, 2002.

[32] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus, Second Edition.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[33] N. El Karoui. Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour IX, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin*, 876 :73–238, 1979.

[34] F.B. Knight. On the random walk and Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103 :218–228, 1962.

[35] D. Lamberton. Convergence of the critical price in the approximation of american options. *Math. Finance*, 3(2) :179–190, 1993.

[36] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Seconde Edition.* Ellipses Edition Marketing, Paris, 1997.

[37] D. Lamberton and G. Pagès. Sur l'approximation des réduites. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 26(2) :331–355, 1990.

[38] J. Ma, P. Protter, J. San Martín, and S. Torres. Numerical method for backward stochastic differential equations. *Ann. Appl. Probab.*, 12(1) :302–316, 2002.

[39] J. Ma, P. Protter, and J. M. Yong. Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly—a four step scheme. *Probab. Theory Related Fields*, 98(3) :339–359, 1994.

[40] P. Marchal. Constructing a sequence of random walks strongly converging to Brownian motion. In *Discrete random walks (Paris, 2003)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AC, pages 181–190 (electronic). Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2003.

[41] J. Mémin. Stability of Doob-Meyer decomposition under extended convergence. *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.*, 19(2) :177–190, 2003.

[42] P.A. Meyer. Convergence faible et compacité des temps d'arrêt d'après Baxter et Chacon. *Séminaire de Probabilités, XII, Lectures Notes in Mathematics, Springer, Berlin*, 649 :411–423, 1978.

[43] A. G. Mucci. Existence and explicit determination of optimal stopping times. *Stochastic Process. Appl.*, 8(1) :33–58, 1978/79.

[44] S. Mulinacci and M. Pratelli. Functional convergence of Snell envelopes : applications to American options approximations. *Finance Stoch.*, 2(3) :311–327, 1998.

[45] J. Neveu. *Martingales à temps discret.* Masson et Cie, éditeurs, Paris, 1972.

[46] É. Pardoux. BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, volume 528 of *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 503–549. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[47] É. Pardoux and S. Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems Control Lett.*, 14(1) :55–61, 1990.

[48] É. Pardoux and S. Peng. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In *Stochastic partial differential equations and their applications (Charlotte, NC, 1991)*, volume 176 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 200–217. Springer, Berlin, 1992.

[49] É. Pardoux, F. Pradeilles, and Z. Rao. Probabilistic interpretation of a system of semi-linear parabolic partial differential equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(4) :467–490, 1997.

[50] S. Peng. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics Stochastics Rep.*, 37(1-2) :61–74, 1991.

[51] M. Pontier and J. Szpirglas. Arrêt optimal avec contrainte. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296(6) :315–318, 1983.

[52] M. Pontier and J. Szpirglas. Arrêt optimal avec contrainte. *Adv. in Appl. Probab.*, 15(4) :798–812, 1983.

[53] A. Renyi. On stable sequence of events. *Sankya, Ser A*, 25 :293–302, 1963.

[54] M. Royer. *Equations différentielles stochastiques rétrogrades et martingales non linéaires.* PhD thesis, Université de Rennes 1, Décembre 2003.

[55] M. Royer. BSDEs with a random terminal time driven by a monotone generator and their links with PDEs. *Stoch. Stoch. Rep.*, 76(4) :281–307, 2004.

[56] A. N. Shiryaev. *Optimal stopping rules.* Springer-Verlag, New York, 1978. Translated from the Russian by A. B. Aries, Applications of Mathematics, Vol. 8.

[57] A.N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance*, volume 3 of *Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999. Facts, models, theory.

[58] A. V. Skorohod. Limit theorems for stochastic processes. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 1 :289–319, 1956.

Convergence de filtrations ; application à la discrétisation de processus et à la stabilité de temps d'arrêt.

Cette thèse porte sur des propriétés de stabilité de problèmes d'arrêt dans le cas où l'on dispose d'une information approximative sur le modèle. La filtration engendrée par un processus représente l'information véhiculée par ce processus au cours du temps. Aussi, les propriétés des suites de filtrations associées à des suites de processus jouent un grand rôle dans ce travail. Un premier axe d'étude concerne la stabilité des notions de réduites et de temps d'arrêt optimaux. Une réduite est la valeur maximale de l'espérance d'une fonction dépendant d'un processus et d'un temps d'arrêt, maximum pris sur l'ensemble des temps d'arrêt pour la filtration engendrée par le processus. Un temps d'arrêt optimal est un temps d'arrêt réalisant le maximum. Le second axe concerne la stabilité de solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades à horizon aléatoire fini presque sûrement quand le mouvement brownien dirigeant l'équation est approché soit par une suite de marches aléatoires, soit par une suite de martingales.

Convergence of filtrations ; application to the discretization of processes and to the stability of stopping times.

This thesis deals with properties of stability of stopping problems when we don't have all the information on the model. The natural filtration of a process represent the information carried by the process along the time. Then, the properties of the sequences of natural filtrations associated to the processes are very important in this work. A first part of this study is about the stability of the notions of value in optimal stopping problem and of optimal stopping time. The first notion is the maximum value of the expectation of a function that depends on a process and on a stopping time, value taken on the set of stopping times for the natural filtration of the process. An optimal stopping time is a stopping time which realises the maximum. The second part is about the stability of the solutions of a backward stochastic differential equation with an almost surely finite terminal time when the Brownian motion that drives the equation is approximated either by a sequence of random walks, either by a sequence of martingales.